Conjuntos K-espectrales y tuplas de operadores

Daniel Estévez

Universidad Autónoma de Madrid

21 de abril de 2017

Estructura

1. Funciones test y conjuntos K-espectrales
   - Colecciones test
   - Subálgebras de funciones analíticas
   - Aplicación: operadores con el espectro en una curva

2. Estructuras separadas y tuplas de operadores
   - Estructuras separadas
   - Vessels y compresión generalizada

Estructura

1. Funciones test y conjuntos K-espectrales
   - Colecciones test
   - Subálgebras de funciones analíticas
   - Aplicación: operadores con el espectro en una curva

2. Estructuras separadas y tuplas de operadores
   - Estructuras separadas
   - Vessels y compresión generalizada

Conjuntos K-espectrales

- Si T es una contracción ($\|T\| \leq 1$) en un espacio de Hilbert

$$\|p(T)\| \leq \sup_{|z|\leq 1} |p(z)|$$

para todo polinomio p (desigualdad de von Neumann).

- Si T es semejante a una contracción ($\|VTV^{-1}\| \leq 1$),

$$\|p(T)\| \leq K \sup_{|z|\leq 1} |p(z)|.$$

- Generalización a dominios distintos de $\overline{\mathbb{D}}$: $X \subset \mathbb{C}$ compacto, $\sigma(T) \subset X$. Entonces X es *K-espectral* para T si

$$\|f(T)\| \leq K \sup_{z\in X} |f(z)| \qquad (*)$$

para toda f racional sin polos en X.

- Si $(*)$ se cumple para toda f racional sin polos en X con valores matriciales $s \times s$, para todo $s \in \mathbb{N}$, y K independiente de s, entonces X se llama *completamente K-espectral*.
- $\overline{\mathbb{D}}$ es completamente K-espectral para T si y solo si T es semejante a una contracción.

Conjuntos K-espectrales

- Si T es una contracción ($\|T\| \leq 1$) en un espacio de Hilbert
$$\|p(T)\| \leq \sup_{|z|\leq 1} |p(z)|$$
para todo polinomio p (desigualdad de von Neumann).
- Si T es semejante a una contracción ($\|VTV^{-1}\| \leq 1$),
$$\|p(T)\| \leq K \sup_{|z|\leq 1} |p(z)|.$$
- Generalización a dominios distintos de $\overline{\mathbb{D}}$: $X \subset \mathbb{C}$ compacto, $\sigma(T) \subset X$. Entonces X es *K-espectral* para T si
$$\|f(T)\| \leq K \sup_{z\in X} |f(z)| \qquad (*)$$
para toda f racional sin polos en X.
- Si $(*)$ se cumple para toda f racional sin polos en X con valores matriciales $s \times s$, para todo $s \in \mathbb{N}$, y K independiente de s, entonces X se llama *completamente K-espectral*.
- $\overline{\mathbb{D}}$ es completamente K-espectral para T si y solo si T es semejante a una contracción.

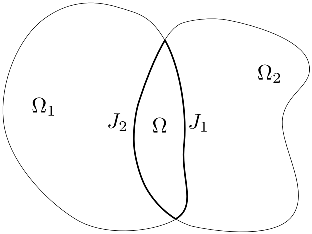
- Si T es una contracción ($\|T\| \leq 1$) en un espacio de Hilbert
$$\|p(T)\| \leq \sup_{|z|\leq 1} |p(z)|$$
para todo polinomio p (desigualdad de von Neumann).
- Si T es semejante a una contracción ($\|VTV^{-1}\| \leq 1$),
$$\|p(T)\| \leq K \sup_{|z|\leq 1} |p(z)|.$$
- Generalización a dominios distintos de $\overline{\mathbb{D}}$: $X \subset \mathbb{C}$ compacto, $\sigma(T) \subset X$. Entonces X es *K-espectral* para T si
$$\|f(T)\| \leq K \sup_{z\in X} |f(z)| \qquad (*)$$
para toda f racional sin polos en X.
- Si $(*)$ se cumple para toda f racional sin polos en X con valores matriciales $s \times s$, para todo $s \in \mathbb{N}$, y K independiente de s, entonces X se llama *completamente K-espectral*.
- $\overline{\mathbb{D}}$ es completamente K-espectral para T si y solo si T es semejante a una contracción.

Funciones test: ejemplo sencillo

- $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ dominios de Jordan cuyas fronteras se intersecan transversalmente, $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$, $\varphi_j : \Omega_j \to \mathbb{D}$ aplicación de Riemann
- **Resultado:** Si $\sigma(T) \subset \Omega$ y $\|\varphi_j(T)\| \leq 1$, entonces $\overline{\Omega}$ es K-espectral para T, con K independiente de T
- **Prueba:** Si $f \in A(\overline{\Omega})$, entonces $f = f_1 + f_2$ con $f_j \in A(\overline{\Omega}_j)$ y $\|f_j\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$ (separación de singularidades de Havin-Nersessian) y

$$\|f(T)\| = \|(f_1 \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(T)) + (f_2 \circ \varphi_2^{-1})(\varphi_2(T))\| \leq \|f_1 \circ \varphi_1^{-1}\|_\infty + \|f_2 \circ \varphi_2^{-1}\|_\infty \leq 2C\|f\|_\infty$$

- Para probar K-espectralidad completa hace falta un lema adicional sobre álgebras C^*.
- Intentar extender este resultado a una situación más general (φ_j no univalentes)

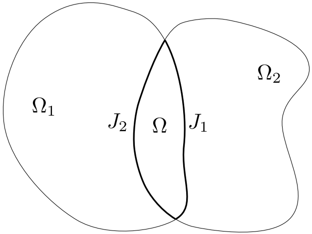


Funciones test: ejemplo sencillo

- $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ dominios de Jordan cuyas fronteras se intersecan transversalmente, $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$, $\varphi_j : \Omega_j \to \mathbb{D}$ aplicación de Riemann
- **Resultado:** Si $\sigma(T) \subset \Omega$ y $\|\varphi_j(T)\| \leq 1$, entonces $\overline{\Omega}$ es K-espectral para T, con K independiente de T
- **Prueba:** Si $f \in A(\overline{\Omega})$, entonces $f = f_1 + f_2$ con $f_j \in A(\overline{\Omega}_j)$ y $\|f_j\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$ (separación de singularidades de Havin-Nersessian) y

$$\|f(T)\| = \|(f_1 \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(T)) + (f_2 \circ \varphi_2^{-1})(\varphi_2(T))\| \leq \|f_1 \circ \varphi_1^{-1}\|_\infty + \|f_2 \circ \varphi_2^{-1}\|_\infty \leq 2C\|f\|_\infty$$

- Para probar K-espectralidad completa hace falta un lema adicional sobre álgebras C^*.
- Intentar extender este resultado a una situación más general (φ_j no univalentes)

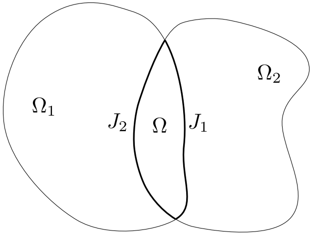


Funciones test: ejemplo sencillo

- $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ dominios de Jordan cuyas fronteras se intersecan transversalmente, $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$, $\varphi_j : \Omega_j \to \mathbb{D}$ aplicación de Riemann
- **Resultado:** Si $\sigma(T) \subset \Omega$ y $\|\varphi_j(T)\| \leq 1$, entonces $\overline{\Omega}$ es K-espectral para T, con K independiente de T
- **Prueba:** Si $f \in A(\overline{\Omega})$, entonces $f = f_1 + f_2$ con $f_j \in A(\overline{\Omega}_j)$ y $\|f_j\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$ (separación de singularidades de Havin-Nersessian) y

$$\|f(T)\| = \|(f_1 \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(T)) + (f_2 \circ \varphi_2^{-1})(\varphi_2(T))\| \leq \|f_1 \circ \varphi_1^{-1}\|_\infty + \|f_2 \circ \varphi_2^{-1}\|_\infty \leq 2C\|f\|_\infty$$

- Para probar K-espectralidad completa hace falta un lema adicional sobre álgebras C^*.
- Intentar extender este resultado a una situación más general (φ_j no univalentes)



Definición

Sea $X \subset \widehat{\mathbb{C}}$ y Φ una colección de funciones de X en $\overline{\mathbb{D}}$ analíticas en un entorno de X. Decimos que Φ es una *colección test* para X si

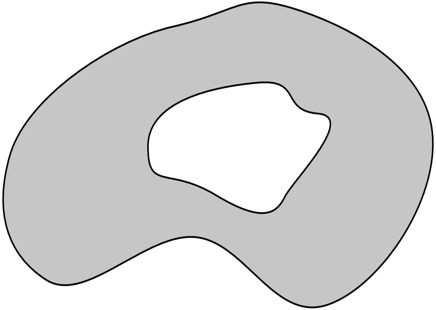
$$\overline{\mathbb{D}} \text{ es completamente } K\text{-espectral para } \varphi(T), \forall \varphi \in \Phi,$$
$$\Longrightarrow \overline{X} \text{ es completamente } K'\text{-espectral para } T.$$

se cumple para todo T con $\sigma(T) \subset X$.

Consideramos los casos $X = \Omega$ y $X = \overline{\Omega}$, donde $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio finitamente conexo con frontera analítica a trozos. El caso $X = \overline{\Omega}$ (cuando $\sigma(T)$ toca $\partial\Omega$) es técnicamente más difícil.

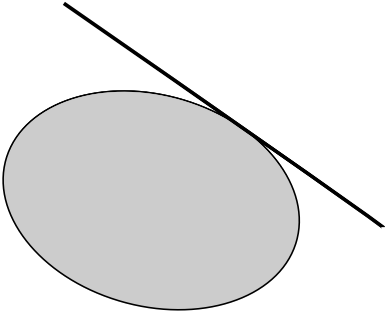
Resultados de la literatura en términos de colecciones test

- Sean $\Omega_1, \ldots, \Omega_n \subset \widehat{\mathbb{C}}$ dominios simplemente conexos con fronteras analíticas que no se intersecan y $\varphi_k : \overline{\Omega_k} \to \overline{\mathbb{D}}$ aplicaciones de Riemann. Entonces $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ es una colección test para $\overline{\bigcap \Omega_k}$. *(Douglas, Paulsen, 1986)*.



- Sean $D_1, \ldots, D_n$ discos en $\widehat{\mathbb{C}}$. y φ_k una transformación de Möbius que lleva D_k en $\mathbb{D}$. Entonces $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ es una colección test para $\overline{\bigcap D_k}$. *(Badea, Beckermann, Crouzeix, 2009)*.

- Sea X un compacto convexo. Escribimos $X = \bigcap H_\alpha$, con H_α semiplanos cerrados. Sea φ_α una transformación de Möbius que lleva H_α en $\overline{\mathbb{D}}$. Entonces $\{\varphi_\alpha\}$ es una colección test para X. *(Delyon, Delyon, 1999)*.



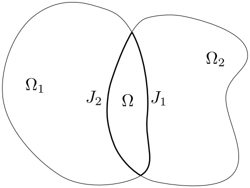
- Si B es un producto finito de Blaschke,

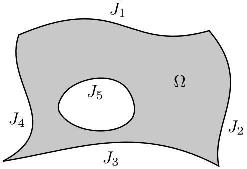
$$B(z) = \lambda \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}, \qquad |\lambda| = 1, \{a_j\}_{j=1}^{n} \subset \mathbb{D}.$$

el conjunto $\{B\}$ es una colección test para $\overline{\mathbb{D}}$. *(Mascioni, 1994)*.

Definición

- $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio tal que $\partial\Omega$ es una unión finita disjunta de curvas de Jordan analíticas a trozos. Suponemos que los ángulos interiores de las “esquinas” de $\partial\Omega$ están en $(0, \pi]$.
- $\{J_k\}_{k=1}^n$ arcos analíticos cerrados que se intersecan a lo sumo en sus extremos y tales que $\partial\Omega = \bigcup J_k$.
- $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}^n$ con $|\varphi_k| = 1$ en J_k
- Φ analítica en un entorno de $\overline{\Omega}$ (puede debilitarse en muchos casos).
- φ_k' no se anula en J_k.
- $\varphi_k(\zeta) \neq \varphi_k(z)$ si $\zeta \in J_k$, $z \in \overline{\Omega}$ y $z \neq \zeta$.

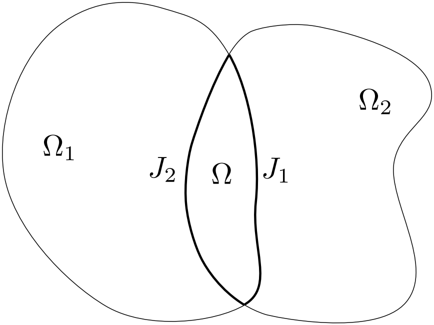




Un ejemplo sencillo de función admisible

Ejemplo

$\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ dominios simplemente conexos con fronteras analíticas que se interesecan transversalmente.
$\Omega = \bigcap \Omega_k$, $J_k = \partial\Omega \cap \partial\Omega_k$.
$\varphi_k : \overline{\Omega_k} \to \overline{\mathbb{D}}$ aplicaciones de Riemann.

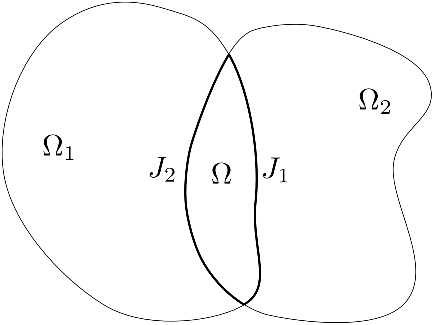


φ_k no tienen por qué ser univalentes en Ω en general.

Un ejemplo sencillo de función admisible

Ejemplo

$\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ dominios simplemente conexos con fronteras analíticas que se interesecan transversalmente.
$\Omega = \bigcap \Omega_k$, $J_k = \partial\Omega \cap \partial\Omega_k$.
$\varphi_k : \overline{\Omega_k} \to \overline{\mathbb{D}}$ aplicaciones de Riemann.



φ_k no tienen por qué ser univalentes en Ω en general.

Resultados principales sobre funciones admisibles

Teorema

Sea Ω simplemente conexo y $\Phi : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}^n$ admisible. Entonces Φ es una colección test para $\overline{\Omega}$ (con constante que depende de $\|T\|$). Si además Φ es inyectiva en $\overline{\Omega}$ y Φ' no se anula en Ω, entonces la constante es independiente de T.

Teorema

Sea Ω finitamente conexo y $\Phi : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}^n$ admisible. Entonces Φ es una colección test en Ω (con constante que depende del valor de $\|(T - \lambda I)^{-1}\|$ en un número finito de puntos). Si además Φ es inyectiva en $\overline{\Omega}$ y Φ' no se anula en Ω, entonces la constante es independiente de T

En el primer teorema, se permite que $\sigma(T)$ interseque $\partial\Omega$ y en el segundo no. El caso en el que $\sigma(T)$ interseca $\partial\Omega$ es mucho más difícil técnicamente.

Teorema

Sea Ω simplemente conexo y $\Phi : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}^n$ admisible. Entonces Φ es una colección test para $\overline{\Omega}$ (con constante que depende de $\|T\|$). Si además Φ es inyectiva en $\overline{\Omega}$ y Φ' no se anula en Ω, entonces la constante es independiente de T.

Teorema

Sea Ω finitamente conexo y $\Phi : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}^n$ admisible. Entonces Φ es una colección test en Ω (con constante que depende del valor de $\|(T - \lambda I)^{-1}\|$ en un número finito de puntos). Si además Φ es inyectiva en $\overline{\Omega}$ y Φ' no se anula en Ω, entonces la constante es independiente de T

En el primer teorema, se permite que $\sigma(T)$ interseque $\partial\Omega$ y en el segundo no. El caso en el que $\sigma(T)$ interseca $\partial\Omega$ es mucho más difícil técnicamente.

Desigualdad de von Neumann y álgebra de Agler

Si T es una contracción,

$$\|p(T)\| \leq \sup_{|z|\leq 1} |p(z)|$$

para todo polinomio p (desigualdad de von Neumann).

Si T_1, T_2 son contracciones que conmutan,

$$\|p(T_1, T_2)\| \leq \sup_{|z_j|\leq 1} |p(z_1, z_2)|$$

para todo polinomio p en dos variables (Ando).

Sin embargo, para tres o mas contracciones $T_1, \ldots, T_n$ que conmutan, en general es falso que

$$\|p(T_1, \ldots, T_n)\| \leq \sup_{|z_j|\leq 1} |p(z_1, \ldots, z_n)|.$$

Se desconoce si existe una constante C_n tal que

$$\|p(T_1, \ldots, T_n)\| \leq C_n \sup_{|z_j|\leq 1} |p(z_1, \ldots, z_n)|$$

para todo polinomio p y contracciones $T_1, \ldots, T_n$ que conmutan. Este problema abierto es importante en la teoría de varios operadores. Se cree que no existe tal constante C_n.

El álgebra de Agler de $\mathbb{D}^n$:

$$\|f\|_{\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)} = \sup_{\|T_j\|\leq 1,\ \sigma(T_j)\subset\mathbb{D}} \|f(T_1, \ldots, T_n)\|.$$

Desigualdad de von Neumann y álgebra de Agler

Si T es una contracción,

$$\|p(T)\| \leq \sup_{|z|\leq 1} |p(z)|$$

para todo polinomio p (desigualdad de von Neumann).
Si T_1, T_2 son contracciones que conmutan,

$$\|p(T_1, T_2)\| \leq \sup_{|z_j|\leq 1} |p(z_1, z_2)|$$

para todo polinomio p en dos variables (Ando).
Sin embargo, para tres o mas contracciones $T_1, \dots, T_n$ que conmutan, en general es falso que

$$\|p(T_1, \dots, T_n)\| \leq \sup_{|z_j|\leq 1} |p(z_1, \dots, z_n)|.$$

Se desconoce si existe una constante C_n tal que

$$\|p(T_1, \dots, T_n)\| \leq C_n \sup_{|z_j|\leq 1} |p(z_1, \dots, z_n)|$$

para todo polinomio p y contracciones $T_1, \dots, T_n$ que conmutan. Este problema abierto es importante en la teoría de varios operadores. Se cree que no existe tal constante C_n.
El álgebra de Agler de $\mathbb{D}^n$:

$$\|f\|_{\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)} = \sup_{\|T_j\|\leq 1,\ \sigma(T_j)\subset\mathbb{D}} \|f(T_1, \dots, T_n)\|.$$

Si T es una contracción,

$$\|p(T)\| \leq \sup_{|z|\leq 1} |p(z)|$$

para todo polinomio p (desigualdad de von Neumann).
Si T_1, T_2 son contracciones que conmutan,

$$\|p(T_1, T_2)\| \leq \sup_{|z_j|\leq 1} |p(z_1, z_2)|$$

para todo polinomio p en dos variables (Ando).
Sin embargo, para tres o mas contracciones $T_1, \ldots, T_n$ que conmutan, en general es falso que

$$\|p(T_1, \ldots, T_n)\| \leq \sup_{|z_j|\leq 1} |p(z_1, \ldots, z_n)|.$$

Se desconoce si existe una constante C_n tal que

$$\|p(T_1, \ldots, T_n)\| \leq C_n \sup_{|z_j|\leq 1} |p(z_1, \ldots, z_n)|$$

para todo polinomio p y contracciones $T_1, \ldots, T_n$ que conmutan. Este problema abierto es importante en la teoría de varios operadores. Se cree que no existe tal constante C_n.
El álgebra de Agler de $\mathbb{D}^n$:

$$\|f\|_{\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)} = \sup_{\|T_j\|\leq 1,\ \sigma(T_j)\subset\mathbb{D}} \|f(T_1, \ldots, T_n)\|.$$

Si T es una contracción,

$$\|p(T)\| \leq \sup_{|z|\leq 1} |p(z)|$$

para todo polinomio p (desigualdad de von Neumann).
Si T_1, T_2 son contracciones que conmutan,

$$\|p(T_1, T_2)\| \leq \sup_{|z_j|\leq 1} |p(z_1, z_2)|$$

para todo polinomio p en dos variables (Ando).
Sin embargo, para tres o mas contracciones $T_1, \ldots, T_n$ que conmutan, en general es falso que

$$\|p(T_1, \ldots, T_n)\| \leq \sup_{|z_j|\leq 1} |p(z_1, \ldots, z_n)|.$$

Se desconoce si existe una constante C_n tal que

$$\|p(T_1, \ldots, T_n)\| \leq C_n \sup_{|z_j|\leq 1} |p(z_1, \ldots, z_n)|$$

para todo polinomio p y contracciones $T_1, \ldots, T_n$ que conmutan. Este problema abierto es importante en la teoría de varios operadores. Se cree que no existe tal constante C_n.
El álgebra de Agler de $\mathbb{D}^n$:

$$\|f\|_{\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)} = \sup_{\|T_j\|\leq 1,\ \sigma(T_j)\subset\mathbb{D}} \|f(T_1, \ldots, T_n)\|.$$

Desigualdad de von Neumann y álgebra de Agler

Si T es una contracción,

$$\|p(T)\| \leq \sup_{|z|\leq 1} |p(z)|$$

para todo polinomio p (desigualdad de von Neumann).
Si T_1, T_2 son contracciones que conmutan,

$$\|p(T_1, T_2)\| \leq \sup_{|z_j|\leq 1} |p(z_1, z_2)|$$

para todo polinomio p en dos variables (Ando).
Sin embargo, para tres o mas contracciones $T_1, \ldots, T_n$ que conmutan, en general es falso que

$$\|p(T_1, \ldots, T_n)\| \leq \sup_{|z_j|\leq 1} |p(z_1, \ldots, z_n)|.$$

Se desconoce si existe una constante C_n tal que

$$\|p(T_1, \ldots, T_n)\| \leq C_n \sup_{|z_j|\leq 1} |p(z_1, \ldots, z_n)|$$

para todo polinomio p y contracciones $T_1, \ldots, T_n$ que conmutan. Este problema abierto es importante en la teoría de varios operadores. Se cree que no existe tal constante C_n.
El álgebra de Agler de $\mathbb{D}^n$:

$$\|f\|_{\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)} = \sup_{\|T_j\|\leq 1,\ \sigma(T_j)\subset\mathbb{D}} \|f(T_1, \ldots, T_n)\|.$$

Denotamos por $\mathscr{B}$ el conjunto de todas las tuplas $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ donde φ_k son productos finitos de Blaschke y Φ es inyectivo en $\overline{\mathbb{D}}$ y Φ' no se anula en $\mathbb{D}$.

Teorema

Si $n \geq 3$ y $p \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$,

$$\|p\|_{\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)} = \sup \|p(\varphi_1(T), \dots, \varphi_n(T))\|,$$

donde $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ recorre todas las tuplas de $\mathscr{B}$ y T recorre todas las matrices diagonalizables con $\sigma(T) \subset \mathbb{D}$ y tales que $\|\varphi_k(T)\| \leq 1$, $k = 1, \dots, n$.

Usamos un teorema de Agler, McCarthy y Young (2013) que dice que basta estudiar la desigualdad de von Neumann para contracciones que son matrices con todos los autovalores distintos (matrices genéricas) y el problema de Pick para construir los productos de Blaschke (resolviendo un problema cuyos datos han sido perturbados de forma adecuada).

Este teorema permite aplicar nuestros resultados sobre colecciones test al estudio de la desigualdad de von Neumann.

Productos de Blaschke y la desigualdad de von Neumann

Denotamos por $\mathscr{B}$ el conjunto de todas las tuplas $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ donde φ_k son productos finitos de Blaschke y Φ es inyectivo en $\overline{\mathbb{D}}$ y Φ' no se anula en $\mathbb{D}$.

Teorema

Si $n \geq 3$ y $p \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$,

$$\|p\|_{\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)} = \sup \|p(\varphi_1(T), \dots, \varphi_n(T))\|,$$

donde $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ recorre todas las tuplas de $\mathscr{B}$ y T recorre todas las matrices diagonalizables con $\sigma(T) \subset \mathbb{D}$ y tales que $\|\varphi_k(T)\| \leq 1$, $k = 1, \dots, n$.

Usamos un teorema de Agler, McCarthy y Young (2013) que dice que basta estudiar la desigualdad de von Neumann para contracciones que son matrices con todos los autovalores distintos (matrices genéricas) y el problema de Pick para construir los productos de Blaschke (resolviendo un problema cuyos datos han sido perturbados de forma adecuada).

Este teorema permite aplicar nuestros resultados sobre colecciones test al estudio de la desigualdad de von Neumann.

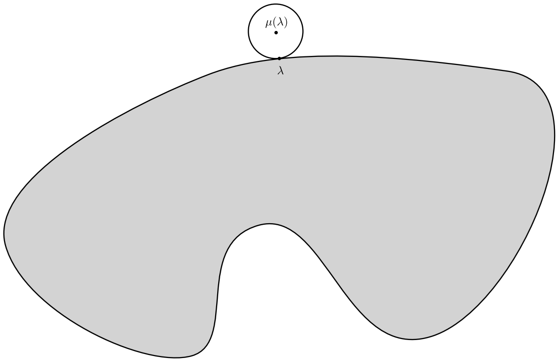
Teorema

Sean $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ dominios de Jordan con fronteras rectificables, Ahlfors regulares que se intersecan transversalmente. Si $\overline{\Omega}_j$ es (completamente) K_j-espectral para T, entonces $\overline{\bigcap \Omega_j}$ es (completamente) K-espectral para T.

Este teorema generaliza un resultado de Badea, Beckermann, Crouzeix (2009) sobre intersección de discos en la esfera de Riemann.

Teorema

Sea Ω un dominio de Jordan C^2 a trozos y $R > 0$ tal que para cada $\lambda \in \Omega$ existe un $\mu(\lambda) \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ tal que $B(\mu, R)$ es tangente a $\partial\Omega$ en λ. Si $\|(T - \mu(\lambda)I)^{-1}\| \leq R^{-1}$ para todo $\lambda \in \partial\Omega$, entonces $\overline{\Omega}$ es completamente K-espectral para T.



Este teorema generaliza resultados de Delyon, Delyon (1999) y Putinar, Sandberg (2005) sobre conjuntos convexos que contienen el rango numérico de un operador. También puede verse como una generalización de ρ-contracciones.

Estructura

1. Funciones test y conjuntos K-espectrales
   - Colecciones test
   - Subálgebras de funciones analíticas
   - Aplicación: operadores con el espectro en una curva

2. Estructuras separadas y tuplas de operadores
   - Estructuras separadas
   - Vessels y compresión generalizada

- Para probar nuestros teoremas sobre conjuntos K-espectrales bastaría con descomponer toda $f \in A(\overline{\Omega})$ como

$$f(z) = g_1(\varphi_1(z)) + \cdots + g_n(\varphi_n(z)), \qquad g_k \in A(\overline{\mathbb{D}}). \tag{$*$}$$

- Si φ_k son univalentes en Ω_k, esto equivale a escribir

$$f(z) = f_1(z) + \cdots + f_n(z), \qquad f_k \in A(\overline{\Omega}_k).$$

- Esto es una separación de singularidades (Havin, Nersessian, Ortega-Cerdà).
- En el caso general, no es posible conseguir $(*)$.

Teorema

Si $\Phi : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}^n$ es admisible, existen operadores acotados $F_k : H^\infty(\Omega) \to H^\infty(\Omega)$ tales que el operador

$$f \mapsto f - \sum_{k=1}^{n} F_k(f) \circ \varphi_k$$

es compacto en $H^\infty(\Omega)$ y su rango está contenido en $A(\overline{\Omega})$. Además, F_k mandan $A(\overline{\Omega})$ en $A(\overline{\mathbb{D}})$.

Separación de singularidades con la composición

- Para probar nuestros teoremas sobre conjuntos K-espectrales bastaría con descomponer toda $f \in A(\overline{\Omega})$ como

$$f(z) = g_1(\varphi_1(z)) + \cdots + g_n(\varphi_n(z)), \qquad g_k \in A(\overline{\mathbb{D}}). \tag{$*$}$$

- Si φ_k son univalentes en Ω_k, esto equivale a escribir

$$f(z) = f_1(z) + \cdots + f_n(z), \qquad f_k \in A(\overline{\Omega}_k).$$

- Esto es una separación de singularidades (Havin, Nersessian, Ortega-Cerdà).
- En el caso general, no es posible conseguir $(*)$.

Teorema

Si $\Phi : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}^n$ es admisible, existen operadores acotados $F_k : H^\infty(\Omega) \to H^\infty(\Omega)$ tales que el operador

$$f \mapsto f - \sum_{k=1}^{n} F_k(f) \circ \varphi_k$$

es compacto en $H^\infty(\Omega)$ y su rango está contenido en $A(\overline{\Omega})$. Además, F_k mandan $A(\overline{\Omega})$ en $A(\overline{\mathbb{D}})$.

Técnicas de la prueba

- Escribir

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{w-z} f(w)\, dw = \sum_k \frac{1}{2\pi i} \int_{J_k} \frac{1}{w-z} f(w)\, dw$$

- El operador integral

$$f \mapsto \int_{J_k} \left[\frac{1}{w-z} - \frac{\varphi_k'(w)}{\varphi_k(w) - \varphi_k(z)} \right] f(w)\, dw$$

  es débilmente singular, y por tanto, compacto.

- Reemplazar las integrales de Cauchy

$$\int_{J_k} \frac{1}{w-z} f(w)\, dw$$

  por integrales de Cauchy *modificadas*

$$\int_{J_k} \frac{\varphi_k'(w)}{\varphi_k(w) - \zeta} f(w)\, dw, \qquad \zeta := \varphi_k(z).$$

- Usar el truco de Havin–Nersessian para obtener funciones de clase H^∞ cuando descomponemos f en una suma de integrales de Cauchy en los arcos J_k.

Subálgebras $\mathcal{H}_\Phi$ y $\mathcal{A}_\Phi$

$$\mathcal{H}_\Phi = \left\{ \sum_{j=1}^{l} f_{j,1}(\varphi_1(z)) f_{j,2}(\varphi_2(z)) \cdots f_{j,n}(\varphi_n(z)) : \ l \in \mathbb{N}, \ f_{j,k} \in H^\infty(\mathbb{D}) \right\}$$

$$\mathcal{A}_\Phi = \left\{ \sum_{j=1}^{l} f_{j,1}(\varphi_1(z)) f_{j,2}(\varphi_2(z)) \cdots f_{j,n}(\varphi_n(z)) : \ l \in \mathbb{N}, \ f_{j,k} \in A(\overline{\mathbb{D}}) \right\}$$

Son subálgebras (no cerradas, a priori) de $H^\infty(\Omega)$ y $A(\overline{\Omega})$ respectivamente.

Preguntas:

- ¿Qué condiciones geométricas sobre Φ garantizan que $\mathcal{H}_\Phi = H^\infty(\Omega)$ y $\mathcal{A}_\Phi = A(\overline{\Omega})$?
- ¿Qué condiciones geométricas sobre Φ garantizan que $\mathcal{H}_\Phi$ y $\mathcal{A}_\Phi$ sean subálgebras cerradas (débil*-cerradas) de codimensión finita en $H^\infty(\Omega)$ y $A(\overline{\Omega})$ respectivamente?

Teorema

Si $\Phi : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}^n$ es admisible, entonces $\mathcal{H}_\Phi$ es una subálgebra débil-cerrada de codimensión finita en $H^\infty(\Omega)$ y $\mathcal{A}_\Phi$ es una subálgebra cerrada de codimensión finita en $A(\overline{\Omega})$. Si además, Φ es inyectiva en $\overline{\Omega}$ y Φ' no se anula en Ω, entonces $\mathcal{H}_\Phi = H^\infty(\Omega)$ y $\mathcal{A}_\Phi = A(\overline{\Omega})$.*

Observación: Es fácil ver que para que se den las igualdades es necesario que Φ sea inyectiva y Φ' no se anule.

Esto es un resultado sobre generación de álgebras. Problemas relacionados han sido estudiados por Wermer (1958), Bishop (1958), Blumenthal (1974), Sibony y Wermer (1974), Stessin y Thomas (2003), Matheson y Stessin (2005) y otros.

Teorema

Si $\Phi : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}^n$ es admisible, entonces $\mathcal{H}_\Phi$ es una subálgebra débil -cerrada de codimensión finita en $H^\infty(\Omega)$ y $\mathcal{A}_\Phi$ es una subálgebra cerrada de codimensión finita en $A(\overline{\Omega})$. Si además, Φ es inyectiva en $\overline{\Omega}$ y Φ' no se anula en Ω, entonces $\mathcal{H}_\Phi = H^\infty(\Omega)$ y $\mathcal{A}_\Phi = A(\overline{\Omega})$.*

Observación: Es fácil ver que para que se den las igualdades es necesario que Φ sea inyectiva y Φ' no se anule.

Esto es un resultado sobre generación de álgebras. Problemas relacionados han sido estudiados por Wermer (1958), Bishop (1958), Blumenthal (1974), Sibony y Wermer (1974), Stessin y Thomas (2003), Matheson y Stessin (2005) y otros.

Operadores compactos: El operador

$$L(f) = \sum_k F_k(f) \circ \varphi_k$$

cumple que $L - I$ es compacto (teorema anterior). Por tanto el rango de L es cerrado y de codimensión finita. El rango de L está contenido en nuestra subálgebra.

Álgebras de Banach: Clasificación de subálgebras unitales cerradas de codimensión uno en un álgebra de Banach conmutativa y unital (Gorin, 1969):

Una subálgebra de codimensión uno puede ser de dos tipos:

- $\{f : f(a) = f(b)\}$
- $\{f : f'(a) = 0\}$

(identificamos elementos del álgebra y funciones a través de la transformada de Gelfand y consideramos derivaciones puntuales en el sentido algebraico).

Operadores compactos: El operador

$$L(f) = \sum_k F_k(f) \circ \varphi_k$$

cumple que $L - I$ es compacto (teorema anterior). Por tanto el rango de L es cerrado y de codimensión finita. El rango de L está contenido en nuestra subálgebra.

Álgebras de Banach: Clasificación de subálgebras unitales cerradas de codimensión uno en un álgebra de Banach conmutativa y unital (Gorin, 1969):

Una subálgebra de codimensión uno puede ser de dos tipos:

- $\{f : f(a) = f(b)\}$
- $\{f : f'(a) = 0\}$

(identificamos elementos del álgebra y funciones a través de la transformada de Gelfand y consideramos derivaciones puntuales en el sentido algebraico).

1. Funciones test y conjuntos K-espectrales
   - Colecciones test
   - Subálgebras de funciones analíticas
   - Aplicación: operadores con el espectro en una curva

2. Estructuras separadas y tuplas de operadores
   - Estructuras separadas
   - Vessels y compresión generalizada

Estimaciones de la resolvente y semejanza a normal

- T un operador con $\sigma(T) \subset \Gamma$, donde Γ es una curva suave sin auto-intersecciones.
- Se tiene $\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq \operatorname{dist}(\lambda, \Gamma)^{-1}$ para λ en un entorno de Γ si y solo si T es normal (Stampfli, 1965).
- Si T es semejante a normal (VTV^{-1} es normal), se tiene $\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq C \operatorname{dist}(\lambda, \Gamma)^{-1}$. El recíproco es falso: Markus (1964), Benamara-Nikolski (1999), Nikolski-Treil (2002).

Teorema

Si Ω es un dominio de Jordan $C^{1+\alpha}$, $\Gamma = \partial\Omega$, U es un entorno de Γ y

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq \operatorname{dist}(\lambda, \Gamma)^{-1}, \qquad \lambda \in U \setminus \overline{\Omega},$$
$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq C \operatorname{dist}(\lambda, \Gamma)^{-1}, \qquad \lambda \in \Omega,$$

entonces T es semejante a normal.

Las dos condiciones de crecimiento pueden intercambiarse.
En la prueba de este teorema usamos nuestra generalización del teorema de Delyon y Delyon para probar que $\overline{\Omega}$ es K-espectral para T.

Estimaciones de la resolvente y semejanza a normal

- T un operador con $\sigma(T) \subset \Gamma$, donde Γ es una curva suave sin auto-intersecciones.
- Se tiene $\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq \operatorname{dist}(\lambda, \Gamma)^{-1}$ para λ en un entorno de Γ si y solo si T es normal (Stampfli, 1965).
- Si T es semejante a normal (VTV^{-1} es normal), se tiene $\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq C \operatorname{dist}(\lambda, \Gamma)^{-1}$. El recíproco es falso: Markus (1964), Benamara-Nikolski (1999), Nikolski-Treil (2002).

Teorema

Si Ω es un dominio de Jordan $C^{1+\alpha}$, $\Gamma = \partial\Omega$, U es un entorno de Γ y

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq \operatorname{dist}(\lambda, \Gamma)^{-1}, \qquad \lambda \in U \setminus \overline{\Omega},$$
$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq C \operatorname{dist}(\lambda, \Gamma)^{-1}, \qquad \lambda \in \Omega,$$

entonces T es semejante a normal.

Las dos condiciones de crecimiento pueden intercambiarse.
En la prueba de este teorema usamos nuestra generalización del teorema de Delyon y Delyon para probar que $\overline{\Omega}$ es K-espectral para T.

- T un operador con $\sigma(T) \subset \Gamma$, donde Γ es una curva suave sin auto-intersecciones.
- Se tiene $\|(T-\lambda I)^{-1}\| \leq \operatorname{dist}(\lambda,\Gamma)^{-1}$ para λ en un entorno de Γ si y solo si T es normal (Stampfli, 1965).
- Si T es semejante a normal (VTV^{-1} es normal), se tiene $\|(T-\lambda I)^{-1}\| \leq C\operatorname{dist}(\lambda,\Gamma)^{-1}$. El recíproco es falso: Markus (1964), Benamara-Nikolski (1999), Nikolski-Treil (2002).

Teorema

Si Ω es un dominio de Jordan $C^{1+\alpha}$, $\Gamma = \partial\Omega$, U es un entorno de Γ y

$$\|(T-\lambda I)^{-1}\| \leq \operatorname{dist}(\lambda,\Gamma)^{-1}, \qquad \lambda \in U \setminus \overline{\Omega},$$
$$\|(T-\lambda I)^{-1}\| \leq C\operatorname{dist}(\lambda,\Gamma)^{-1}, \qquad \lambda \in \Omega,$$

entonces T es semejante a normal.

Las dos condiciones de crecimiento pueden intercambiarse.
En la prueba de este teorema usamos nuestra generalización del teorema de Delyon y Delyon para probar que $\overline{\Omega}$ es K-espectral para T.

Generalización de un teorema de van Casteren

Ω un dominio de Jordan $C^{1+\alpha}$, $\Gamma = \partial\Omega$. $\{\gamma_s\}_{0<s<1}$ una familia de curvas de Jordan tiende regularmente a Γ (cuando $s \to 0$) si:

1. $C^{-1}s \leq \operatorname{dist}(x, \Gamma) \leq Cs, \quad x \in \gamma_s$
2. $\operatorname{long}(\gamma_s \cap B(x, r)) \leq Cr$

Si $\gamma_s \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ para todo s, decimos que $\{\gamma_s\}$ tiende regularmente a Γ desde fuera.

Teorema (Generalización de van Casteren)

Si $\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq C \operatorname{dist}(\lambda, \Gamma)^{-1}$ *para* $\lambda \in \Omega$ *y*

$$\int_{\gamma_s} \|(T - \lambda I)^{-1}x\|^2 \, |d\lambda| \leq C\|x\|^2 s^{-1},$$

$$\int_{\gamma_s} \|(T^* - \overline{\lambda} I)^{-1}x\|^2 \, |d\lambda| \leq C\|x\|^2 s^{-1},$$

para alguna familia de curvas $\{\gamma_s\}_{0<s<1}$ *que tiende regularmente a* Γ *desde fuera, entonces* T *es semejante a normal.*

El caso $\Omega = \mathbb{D}$, $\gamma_s = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 + s\}$ es debido a van Casteren (1984).

Generalización de un teorema de van Casteren

Ω un dominio de Jordan $C^{1+\alpha}$, $\Gamma = \partial\Omega$. $\{\gamma_s\}_{0<s<1}$ una familia de curvas de Jordan tiende regularmente a Γ (cuando $s \to 0$) si:

1. $C^{-1}s \leq \operatorname{dist}(x, \Gamma) \leq Cs, \quad x \in \gamma_s$
2. $\operatorname{long}(\gamma_s \cap B(x, r)) \leq Cr$

Si $\gamma_s \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ para todo s, decimos que $\{\gamma_s\}$ tiende regularmente a Γ desde fuera.

Teorema (Generalización de van Casteren)

Si $\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq C \operatorname{dist}(\lambda, \Gamma)^{-1}$ para $\lambda \in \Omega$ y

$$\int_{\gamma_s} \|(T - \lambda I)^{-1}x\|^2 \, |d\lambda| \leq C\|x\|^2 s^{-1},$$

$$\int_{\gamma_s} \|(T^* - \overline{\lambda} I)^{-1}x\|^2 \, |d\lambda| \leq C\|x\|^2 s^{-1},$$

para alguna familia de curvas $\{\gamma_s\}_{0<s<1}$ que tiende regularmente a Γ desde fuera, entonces T es semejante a normal.

El caso $\Omega = \mathbb{D}$, $\gamma_s = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 + s\}$ es debido a van Casteren (1984).

Ω un dominio de Jordan $C^{1+\alpha}$, $\Gamma = \partial\Omega$. $\{\gamma_s\}_{0<s<1}$ una familia de curvas de Jordan tiende regularmente a Γ (cuando $s \to 0$) si:

1. $C^{-1}s \leq \operatorname{dist}(x, \Gamma) \leq Cs, \quad x \in \gamma_s$
2. $\operatorname{long}(\gamma_s \cap B(x,r)) \leq Cr$

Si $\gamma_s \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ para todo s, decimos que $\{\gamma_s\}$ tiende regularmente a Γ desde fuera.

Teorema (Generalización de van Casteren)

Si $\|(T-\lambda I)^{-1}\| \leq C \operatorname{dist}(\lambda, \Gamma)^{-1}$ *para* $\lambda \in \Omega$ *y*

$$\int_{\gamma_s} \|(T-\lambda I)^{-1}x\|^2 \, |d\lambda| \leq C\|x\|^2 s^{-1},$$

$$\int_{\gamma_s} \|(T^*-\overline{\lambda} I)^{-1}x\|^2 \, |d\lambda| \leq C\|x\|^2 s^{-1},$$

para alguna familia de curvas $\{\gamma_s\}_{0<s<1}$ *que tiende regularmente a* Γ *desde fuera, entonces* T *es semejante a normal.*

El caso $\Omega = \mathbb{D}$, $\gamma_s = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 + s\}$ es debido a van Casteren (1984).

Generalización de un teorema de van Casteren

Ω un dominio de Jordan $C^{1+\alpha}$, $\Gamma = \partial\Omega$. $\{\gamma_s\}_{0<s<1}$ una familia de curvas de Jordan tiende regularmente a Γ (cuando $s \to 0$) si:

1. $C^{-1}s \leq \operatorname{dist}(x,\Gamma) \leq Cs, \quad x \in \gamma_s$
2. $\operatorname{long}(\gamma_s \cap B(x,r)) \leq Cr$

Si $\gamma_s \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ para todo s, decimos que $\{\gamma_s\}$ tiende regularmente a Γ desde fuera.

Teorema (Generalización de van Casteren)

Si $\|(T-\lambda I)^{-1}\| \leq C \operatorname{dist}(\lambda,\Gamma)^{-1}$ *para* $\lambda \in \Omega$ *y*

$$\int_{\gamma_s} \|(T-\lambda I)^{-1}x\|^2 \, |d\lambda| \leq C\|x\|^2 s^{-1},$$

$$\int_{\gamma_s} \|(T^*-\overline{\lambda} I)^{-1}x\|^2 \, |d\lambda| \leq C\|x\|^2 s^{-1},$$

para alguna familia de curvas $\{\gamma_s\}_{0<s<1}$ *que tiende regularmente a* Γ *desde fuera, entonces* T *es semejante a normal.*

El caso $\Omega = \mathbb{D}$, $\gamma_s = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1+s\}$ es debido a van Casteren (1984).

Extensión pseudoanalítica: Si $f \in C^{1+\alpha}(\Gamma)$, existe $F \in C^1(\mathbb{C})$ tal que $F|\Gamma = f$ y $|\bar{\partial} F(z)| \leq C\|f\|_{C^{1+\alpha}} \operatorname{dist}(z, \Gamma)^{\alpha}$.

Cálculo de Dynkin: Si $\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq C \operatorname{dist}(\lambda, \Gamma)^{-1}$, entonces puede definirse $f(T)$ para $f \in C^{1+\alpha}(\Gamma)$ como

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} F(\lambda)(\lambda I - T)^{-1}\, d\lambda - \frac{1}{\pi}\iint_D \bar{\partial} F(\lambda)(\lambda I - T)^{-1}\, dA(\lambda),$$

donde F es una extensión pseudoanalítica de f y $D \supset \Gamma$.

Un difeomorfismo $C^{1+\alpha}$ adecuado $\eta : \Gamma \to \mathbb{T}$. Lo utilizamos para pasar de Γ y $\mathbb{T}$ y probar que $\eta(T)$ es semejante a unitario. Relacionamos las estimaciones de las resolventes de T y $\eta(T)$:

$$C^{-1}\|(T - \lambda I)^{-1}x\| \leq \|(\eta(T) - \eta(\lambda)I)^{-1}x\| \leq C\|(T - \lambda I)^{-1}x\|.$$

Estructura

1. Funciones test y conjuntos K-espectrales
   - Colecciones test
   - Subálgebras de funciones analíticas
   - Aplicación: operadores con el espectro en una curva
2. Estructuras separadas y tuplas de operadores
   - Estructuras separadas
   - Vessels y compresión generalizada

Definición

Una *estructura separada* es un espacio de Hilbert K, un par de operadores autoadjuntos $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(K)$ que conmutan y una descomposición

$$K = \overbrace{H_{0,-} \oplus M_-}^{H_-} \oplus \overbrace{M_+ \oplus H_{0,+}}^{H_+},$$

con $\dim M_- = \dim M_+ < \infty$ tal que A_1, A_2 tienen la estructura

$$A_j = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & \Lambda_{-1} & R_{-1} & 0 \\ 0 & T_0 & \Lambda_0 & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}, \qquad j = 1, 2.$$

Normalmente trabajamos con el operador normal $N = A_1 + iA_2$ en lugar de con el par A_1, A_2.

El espacio finito dimensional $M = M_- \oplus M_+$ sirve para caracterizar el comportamiento de la estructura separada a través de unas matrices auxiliares (que se construyen usando $\Lambda_{-1}, \Lambda_0, R_{-1}, T_0$).

Definición

Una *estructura separada* es un espacio de Hilbert K, un par de operadores autoadjuntos $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(K)$ que conmutan y una descomposición

$$K = \overbrace{H_{0,-} \oplus M_-}^{H_-} \oplus \overbrace{M_+ \oplus H_{0,+}}^{H_+},$$

con $\dim M_- = \dim M_+ < \infty$ tal que A_1, A_2 tienen la estructura

$$A_j = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & \Lambda_{-1} & R_{-1} & 0 \\ 0 & T_0 & \Lambda_0 & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}, \qquad j = 1, 2.$$

Normalmente trabajamos con el operador normal $N = A_1 + iA_2$ en lugar de con el par A_1, A_2.

El espacio finito dimensional $M = M_- \oplus M_+$ sirve para caracterizar el comportamiento de la estructura separada a través de unas matrices auxiliares (que se construyen usando $\Lambda_{-1}, \Lambda_0, R_{-1}, T_0$).

Un ejemplo: operadores subnormales de tipo finito (según Xia y Yakubovich)

$S \in \mathcal{B}(H)$ es subnormal si $S = N|H$, con $N \in \mathcal{B}(K)$ normal, $K \supset H$.
S es subnormal puro si no existe un subespacio no trivial H_0 que reduzca a S y tal que $S|H_0$ sea normal.

La extensión normal mínima: $N = \begin{bmatrix} S'^* & 0 \\ X & S \end{bmatrix}$.

S es subnormal de tipo finito si su autoconmutador $C = S^*S - SS^*$ tiene rango finito.
Si S es subnormal puro de tipo finito,

$$K = H_{0,-} \oplus M_- \oplus M_+ \oplus H_{0,+},$$

con $M_+ = CH$, $\dim M_- = \dim M_+ < \infty$, y

$$N = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & \Lambda_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & T_0 & \Lambda_0 & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

$A_1 = \operatorname{Re}(aN + bN^*)$, $A_2 = \operatorname{Im}(aN + bN^*)$ forman una estructura separada ($a, b \in \mathbb{C}$).

Un ejemplo: operadores subnormales de tipo finito (según Xia y Yakubovich)

$S \in \mathcal{B}(H)$ es subnormal si $S = N|H$, con $N \in \mathcal{B}(K)$ normal, $K \supset H$.
S es subnormal puro si no existe un subespacio no trivial H_0 que reduzca a S y tal que $S|H_0$ sea normal.

La extensión normal mínima: $N = \begin{bmatrix} S'^* & 0 \\ X & S \end{bmatrix}$.

S es subnormal de tipo finito si su autoconmutador $C = S^*S - SS^*$ tiene rango finito.
Si S es subnormal puro de tipo finito,

$$K = H_{0,-} \oplus M_- \oplus M_+ \oplus H_{0,+},$$

con $M_+ = CH$, $\dim M_- = \dim M_+ < \infty$, y

$$N = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & \Lambda_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & T_0 & \Lambda_0 & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

$A_1 = \operatorname{Re}(aN + bN^*)$, $A_2 = \operatorname{Im}(aN + bN^*)$ forman una estructura separada ($a, b \in \mathbb{C}$).

Un ejemplo: operadores subnormales de tipo finito (según Xia y Yakubovich)

$S \in \mathcal{B}(H)$ es subnormal si $S = N|H$, con $N \in \mathcal{B}(K)$ normal, $K \supset H$.
S es subnormal puro si no existe un subespacio no trivial H_0 que reduzca a S y tal que $S|H_0$ sea normal.

La extensión normal mínima: $N = \begin{bmatrix} S'^* & 0 \\ X & S \end{bmatrix}$.

S es subnormal de tipo finito si su autoconmutador $C = S^*S - SS^*$ tiene rango finito.
Si S es subnormal puro de tipo finito,

$$K = H_{0,-} \oplus M_- \oplus M_+ \oplus H_{0,+},$$

con $M_+ = CH$, $\dim M_- = \dim M_+ < \infty$, y

$$N = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & \Lambda_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & T_0 & \Lambda_0 & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

$A_1 = \mathrm{Re}(aN + bN^*)$, $A_2 = \mathrm{Im}(aN + bN^*)$ forman una estructura separada ($a, b \in \mathbb{C}$).

Un ejemplo: operadores subnormales de tipo finito (según Xia y Yakubovich)

$S \in \mathcal{B}(H)$ es subnormal si $S = N|H$, con $N \in \mathcal{B}(K)$ normal, $K \supset H$.
S es subnormal puro si no existe un subespacio no trivial H_0 que reduzca a S y tal que $S|H_0$ sea normal.

La extensión normal mínima: $N = \begin{bmatrix} S'^* & 0 \\ X & S \end{bmatrix}.$

S es subnormal de tipo finito si su autoconmutador $C = S^*S - SS^*$ tiene rango finito.
Si S es subnormal puro de tipo finito,

$$K = H_{0,-} \oplus M_- \oplus M_+ \oplus H_{0,+},$$

con $M_+ = CH$, $\dim M_- = \dim M_+ < \infty$, y

$$N = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & \Lambda_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & T_0 & \Lambda_0 & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

$A_1 = \mathrm{Re}(aN + bN^*)$, $A_2 = \mathrm{Im}(aN + bN^*)$ forman una estructura separada ($a, b \in \mathbb{C}$).

Un ejemplo: operadores subnormales de tipo finito (según Xia y Yakubovich)

$S \in \mathcal{B}(H)$ es subnormal si $S = N|H$, con $N \in \mathcal{B}(K)$ normal, $K \supset H$.
S es subnormal puro si no existe un subespacio no trivial H_0 que reduzca a S y tal que $S|H_0$ sea normal.

La extensión normal mínima: $N = \begin{bmatrix} S'^* & 0 \\ X & S \end{bmatrix}$.

S es subnormal de tipo finito si su autoconmutador $C = S^*S - SS^*$ tiene rango finito.
Si S es subnormal puro de tipo finito,

$$K = H_{0,-} \oplus M_- \oplus M_+ \oplus H_{0,+},$$

con $M_+ = CH$, $\dim M_- = \dim M_+ < \infty$, y

$$N = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & \Lambda_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & T_0 & \Lambda_0 & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

$A_1 = \operatorname{Re}(aN + bN^*)$, $A_2 = \operatorname{Im}(aN + bN^*)$ forman una estructura separada ($a, b \in \mathbb{C}$).

Curva discriminante

Definimos matrices auxiliares $\alpha, \gamma \in \mathcal{B}(M)$ mediante

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -R_{-1} \\ T_0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad s = P_M N|M = \begin{bmatrix} \Lambda_{-1} & R_{-1} \\ T_0 & \Lambda_0 \end{bmatrix}, \qquad \gamma = -(\alpha^* s + \alpha s^*).$$

Entonces

$$\alpha^* P_M N + \alpha P_M N^* + \gamma = 0.$$

Esto motiva definir la *curva discriminante*

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \det(z\alpha^* + w\alpha + \gamma) = 0\}.$$

Se tiene $\sigma(N) \subset \{z \in \mathbb{C} : (z, \overline{z}) \in X\}$.

Función mosaico

Es una generalización de la función mosaico que define Xia para operadores subnormales.

Definición

La funcion mosaico ν es

$$\nu(z) = P_M(N - z)^{-1} P_{H_+}(N - z)|M, \qquad z \notin \sigma(N).$$

Sus valores son proyecciones paralelas en M.

Las matrices auxiliares α, γ y la función mosaico ν contienen toda la información sobre la estructura separada.
Si $m_1, m_2 \in M$ y $z, w \notin \sigma(N)$, entonces

$$\langle (N^* - \overline{w})^{-1} m_1, (N^* - \overline{z})^{-1} m_2 \rangle = \langle (\gamma + z\alpha^* + w\alpha)^{-1}(I - \alpha\nu(z)\alpha^{-1} - \nu(w)^*)m_1, m_2 \rangle.$$

Salvo en casos degenerados, los vectores $(N^* - \overline{z})^{-1} m$, con $m \in M$, $z \notin \sigma(N)$, generan todo K. Por tanto, podemos recuperar el producto escalar en K.

Pregunta: ¿Se puede recuperar la función mosaico ν a partir de las matrices α y γ? En este caso, la estructura separada (que contiene objetos infinito-dimensionales) vendría definida por una cantidad finito-dimensional de datos.

Es una generalización de la función mosaico que define Xia para operadores subnormales.

Definición

La funcion mosaico ν es

$$\nu(z) = P_M(N - z)^{-1} P_{H_+}(N - z)|M, \qquad z \notin \sigma(N).$$

Sus valores son proyecciones paralelas en M.

Las matrices auxiliares α, γ y la función mosaico ν contienen toda la información sobre la estructura separada.
Si $m_1, m_2 \in M$ y $z, w \notin \sigma(N)$, entonces

$$\langle (N^* - \overline{w})^{-1} m_1, (N^* - \overline{z})^{-1} m_2 \rangle = \langle (\gamma + z\alpha^* + w\alpha)^{-1} (I - \alpha\nu(z)\alpha^{-1} - \nu(w)^*) m_1, m_2 \rangle.$$

Salvo en casos degenerados, los vectores $(N^* - \overline{z})^{-1} m$, con $m \in M$, $z \notin \sigma(N)$, generan todo K. Por tanto, podemos recuperar el producto escalar en K.

Pregunta: ¿Se puede recuperar la función mosaico ν a partir de las matrices α y γ? En este caso, la estructura separada (que contiene objetos infinito-dimensionales) vendría definida por una cantidad finito-dimensional de datos.

Función mosaico

Es una generalización de la función mosaico que define Xia para operadores subnormales.

Definición

La funcion mosaico ν es

$$\nu(z) = P_M(N - z)^{-1} P_{H_+}(N - z)|M, \qquad z \notin \sigma(N).$$

Sus valores son proyecciones paralelas en M.

Las matrices auxiliares α, γ y la función mosaico ν contienen toda la información sobre la estructura separada.
Si $m_1, m_2 \in M$ y $z, w \notin \sigma(N)$, entonces

$$\langle (N^* - \overline{w})^{-1} m_1, (N^* - \overline{z})^{-1} m_2 \rangle = \langle (\gamma + z\alpha^* + w\alpha)^{-1}(I - \alpha\nu(z)\alpha^{-1} - \nu(w)^*) m_1, m_2 \rangle.$$

Salvo en casos degenerados, los vectores $(N^* - \overline{z})^{-1} m$, con $m \in M$, $z \notin \sigma(N)$, generan todo K. Por tanto, podemos recuperar el producto escalar en K.

Pregunta: ¿Se puede recuperar la función mosaico ν a partir de las matrices α y γ? En este caso, la estructura separada (que contiene objetos infinito-dimensionales) vendría definida por una cantidad finito-dimensional de datos.

La funcion meromorfa Q

Ponemos

$$\Sigma = -\alpha^{-1}\alpha^*, \qquad D = -\alpha^{-1}\gamma.$$

La ecuación de la curva se reescribe como

$$\det(z\Sigma + D - wI) = 0$$

Si $p = (z, w) \in X$, ponemos

$$Q(p) = \Pi_w(z\Sigma + D) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda - w| = \varepsilon} (z\Sigma + D - \lambda I)^{-1}\, d\lambda$$

la proyección de Riesz de $z\Sigma + D$ asociada al autovalor w.
Entonces $Q(p)$ es una proyección paralela en M y para cada z_0

$$\sum_{p=(z_0,w)\in X} Q(p) = I_M.$$

Q es una función meromorfa en X (entendemos X como unión finita de superficies de Riemann, usando la desingularización).

Fórmula de restauración

La curva algebraica X es una curva real y viene equipada con una conjugación compleja. Decimos que es *separada* si su parte real $X_{\mathbb{R}}$ divide la curva en dos mitades (que son intercambiadas por la conjugación compleja).

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma^- & 0 \\ 0 & \Sigma_+ \end{bmatrix}.$$

Teorema

Si $\sigma(\Sigma^-) \cap \sigma(\Sigma^+) = \emptyset$*, entonces la curva discriminante* X *es separada,* $X = X_- \cup X_{\mathbb{R}} \cup X_+$ *y para cada* z_0*,*

$$\nu(z_0) = \sum_{p=(z_0,w)\in X_+} Q(p).$$

Estructura

1. Funciones test y conjuntos K-espectrales
   - Colecciones test
   - Subálgebras de funciones analíticas
   - Aplicación: operadores con el espectro en una curva

2. Estructuras separadas y tuplas de operadores
   - Estructuras separadas
   - Vessels y compresión generalizada

Vessels

Teoría desarrollada por Livšic, Vinnikov y otros.
Empezamos con dos operadores $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(H)$ que conmutan y tienen parte imaginaria finitodimensional. Ponemos

$$M = (B_1 - B_1^*)H + (B_2 - B_2^*)H.$$

Se definen matrices autoadjuntas auxiliares en M:

$$\sigma_j = \frac{1}{i}(B_j - B_j^*)|M, \qquad j = 1, 2,$$

y γ^{in}, γ^{out}.

Se define el *polinomio discriminante*

$$\Delta(x_1, x_2) = \det(x_1\sigma_2 - x_2\sigma_1 + \gamma^{\text{in}}) = \det(x_1\sigma_2 - x_2\sigma_1 + \gamma^{\text{out}})$$

y la *curva discriminante*

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : \Delta(x_1, x_2) = 0\}.$$

Se tiene $\sigma(B_1, B_2) \subset X$.

Teoría desarrollada por Livšic, Vinnikov y otros.
Empezamos con dos operadores $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(H)$ que conmutan y tienen parte imaginaria finitodimensional. Ponemos

$$M = (B_1 - B_1^*)H + (B_2 - B_2^*)H.$$

Se definen matrices autoadjuntas auxiliares en M:

$$\sigma_j = \frac{1}{i}(B_j - B_j^*)|M, \qquad j = 1, 2,$$

y $\gamma^{\text{in}}, \gamma^{\text{out}}$.

Se define el *polinomio discriminante*

$$\Delta(x_1, x_2) = \det(x_1\sigma_2 - x_2\sigma_1 + \gamma^{\text{in}}) = \det(x_1\sigma_2 - x_2\sigma_1 + \gamma^{\text{out}})$$

y la *curva discriminante*

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : \Delta(x_1, x_2) = 0\}.$$

Se tiene $\sigma(B_1, B_2) \subset X$.

Dilatación y compresión de tuplas de operadores

Un operador

Teoría espectral de contracciones de Sz.-Nagy y Foias.

$B \in \mathcal{B}(H)$, $\|B\| \leq 1$

dilatación $\Downarrow$ $\Uparrow$ compresión

Teoría espectral de isometrías. Modelo funcional sobre $H^2(\mathbb{D})$ (con valores vectoriales).

A isometría/unitario.

Tuplas de operadores

Teoría de Livšic-Vinnikov.

B_1, B_2, $\dim \operatorname{Im} B_j < \infty$

dilatación $\downarrow$ $\Uparrow$ compresión

Estructuras separadas. (Modelo funcional sobre H^2 de las mitades de la curva discriminante).

A_1, A_2 autoadjuntos.

La compresión clásica

Si $A \in \mathcal{B}(K)$, K se descompone como

$$K = G_- \oplus H \oplus G_+$$

y A tiene la estructura

$$A = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & B & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix},$$

entonces B se llama la *compresión* de A y A se llama *dilatación* de B.

Para todo polinomio p,

$$p(A) = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & p(B) & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Usando la existencia de dilatación unitaria de una contracción puede probarse la desigualdad de von Neumann de forma sencilla.

Observación: G_+ y $H \oplus G_+$ son invariantes para A.

La compresión clásica

Si $A \in \mathcal{B}(K)$, K se descompone como

$$K = G_- \oplus H \oplus G_+$$

y A tiene la estructura

$$A = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & B & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix},$$

entonces B se llama la *compresión* de A y A se llama *dilatación* de B.

Para todo polinomio p,

$$p(A) = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & p(B) & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Usando la existencia de dilatación unitaria de una contracción puede probarse la desigualdad de von Neumann de forma sencilla.

Observación: G_+ y $H \oplus G_+$ son invariantes para A.

La compresión clásica

Si $A \in \mathcal{B}(K)$, K se descompone como

$$K = G_- \oplus H \oplus G_+$$

y A tiene la estructura

$$A = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & B & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix},$$

entonces B se llama la *compresión* de A y A se llama *dilatación* de B.

Para todo polinomio p,

$$p(A) = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & p(B) & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Usando la existencia de dilatación unitaria de una contracción puede probarse la desigualdad de von Neumann de forma sencilla.

Observación: G_+ y $H \oplus G_+$ son invariantes para A.

La compresión clásica

Si $A \in \mathcal{B}(K)$, K se descompone como

$$K = G_- \oplus H \oplus G_+$$

y A tiene la estructura

$$A = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & B & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix},$$

entonces B se llama la *compresión* de A y A se llama *dilatación* de B.

Para todo polinomio p,

$$p(A) = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & p(B) & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Usando la existencia de dilatación unitaria de una contracción puede probarse la desigualdad de von Neumann de forma sencilla.

Observación: G_+ y $H \oplus G_+$ son invariantes para A.

Compresión de estructuras separadas

$A_1, A_2 : K \to K$ autoadjuntos. Dos estructuras separadas para A_1, A_2

$$\omega : K = \overbrace{H_{0,-} \oplus M_-}^{H_-} \oplus \overbrace{M_+ \oplus H_{0,+}}^{H_+}, \qquad \widehat{\omega} : K = \overbrace{\widehat{H}_{0,-} \oplus \widehat{M}_-}^{\widehat{H}_-} \oplus \overbrace{\widehat{M}_+ \oplus \widehat{H}_{0,+}}^{\widehat{H}_+}.$$

Asumimos que estas estructuras están subordinadas ($\widehat{\omega} \prec \omega$), es decir

$$\widehat{H}_+ \subset H_+ \qquad (\iff H_- \subset \widehat{H}_-).$$

Ésta es una relación de orden parcial.

Definimos una noción de *compresión generalizada* (no se requiere que ningún espacio sea invariante).

Lema

Los operadores A_1, A_2 se pueden comprimir a $H_+/\widehat{H}_+$ si y solo si $P_{M_+}|\widehat{M}_+ : \widehat{M}_+ \to M_+$ es invertible.

Teorema

Si B_1, B_2 son las compresiones generalizadas de A_1 y A_2 a $H_+/\widehat{H}_+$, entonces B_1, B_2 forman un vessel y las matrices auxiliares del vessel $\sigma_1, \sigma_2, \gamma^{in}, \gamma^{out}$ se escriben de forma sencilla en términos de las matrices auxiliares α, γ de la estructura separada. En particular, las curvas discriminantes del vessel y la estructura separada coinciden.

Compresión de estructuras separadas

$A_1, A_2 : K \to K$ autoadjuntos. Dos estructuras separadas para A_1, A_2

$$\omega : K = \overbrace{H_{0,-} \oplus M_-}^{H_-} \oplus \overbrace{M_+ \oplus H_{0,+}}^{H_+}, \qquad \widehat{\omega} : K = \overbrace{\widehat{H}_{0,-} \oplus \widehat{M}_-}^{\widehat{H}_-} \oplus \overbrace{\widehat{M}_+ \oplus \widehat{H}_{0,+}}^{\widehat{H}_+}.$$

Asumimos que estas estructuras están subordinadas ($\widehat{\omega} \prec \omega$), es decir

$$\widehat{H}_+ \subset H_+ \qquad (\Longleftrightarrow H_- \subset \widehat{H}_-).$$

Ésta es una relación de orden parcial.
Definimos una noción de *compresión generalizada* (no se requiere que ningún espacio sea invariante).

Lema

Los operadores A_1, A_2 se pueden comprimir a $H_+/\widehat{H}_+$ si y solo si $P_{M_+}|\widehat{M}_+ : \widehat{M}_+ \to M_+$ es invertible.

Teorema

Si B_1, B_2 son las compresiones generalizadas de A_1 y A_2 a $H_+/\widehat{H}_+$, entonces B_1, B_2 forman un vessel y las matrices auxiliares del vessel $\sigma_1, \sigma_2, \gamma^{in}, \gamma^{out}$ se escriben de forma sencilla en términos de las matrices auxiliares α, γ de la estructura separada. En particular, las curvas discriminantes del vessel y la estructura separada coinciden.

Compresión de estructuras separadas

$A_1, A_2 : K \to K$ autoadjuntos. Dos estructuras separadas para A_1, A_2

$$\omega : K = \overbrace{H_{0,-} \oplus M_-}^{H_-} \oplus \overbrace{M_+ \oplus H_{0,+}}^{H_+}, \qquad \widehat{\omega} : K = \overbrace{\widehat{H}_{0,-} \oplus \widehat{M}_-}^{\widehat{H}_-} \oplus \overbrace{\widehat{M}_+ \oplus \widehat{H}_{0,+}}^{\widehat{H}_+}.$$

Asumimos que estas estructuras están subordinadas ($\widehat{\omega} \prec \omega$), es decir

$$\widehat{H}_+ \subset H_+ \qquad (\Longleftrightarrow H_- \subset \widehat{H}_-).$$

Ésta es una relación de orden parcial.
Definimos una noción de *compresión generalizada* (no se requiere que ningún espacio sea invariante).

Lema

Los operadores A_1, A_2 se pueden comprimir a $H_+/\widehat{H}_+$ si y solo si $P_{M_+}|\widehat{M}_+ : \widehat{M}_+ \to M_+$ es invertible.

Teorema

Si B_1, B_2 son las compresiones generalizadas de A_1 y A_2 a $H_+/\widehat{H}_+$, entonces B_1, B_2 forman un vessel y las matrices auxiliares del vessel $\sigma_1, \sigma_2, \gamma^{in}, \gamma^{out}$ se escriben de forma sencilla en términos de las matrices auxiliares α, γ de la estructura separada. En particular, las curvas discriminantes del vessel y la estructura separada coinciden.