Técnicas de análisis complejo en la teoría espectral de operadores lineales

Daniel Estévez Sánchez

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

27 de septiembre de 2013

Resumen

Resumen

1. Dilatación de un operador: Teoría de Sz.-Nagy–Foiaş

2. Dilatación de varios operadores

3. Estructuras separadas y teoría de Livšic-Vinnikov

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "A"] \arrow[d, hook] & H' \arrow[d, hook] \\
K \arrow[r, "B"] & K'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \arrow[d, hook] & H' \arrow[l, "A^*"'] \arrow[d, hook] \\
K & K' \arrow[l, "B^*"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "A"] & H' \\
K \arrow[u, two heads, "P_H"] \arrow[r, "B"] & K' \arrow[u, two heads, "P_{H'}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "A^n"] \arrow[d, hook] & H \\
K \arrow[r, "B^n"] & K \arrow[u, two heads, "P_H"']
\end{tikzcd}
$$

1. B es una *extensión* de A si $B|H = A$ (equivalentemente, si el primer diagrama conmuta).
2. B es una *elevación* de A si B^* es una *extensión* de A^* (equivalentemente, si el segundo o tercer diagrama conmuta). Esto es equivalente a $P_H B = A P_H$.
3. Si $H = H'$ y $K = K'$, decimos que B es una dilatación de A si $A^n = P_H B^n|H$, para $n \geq 0$ (equivalentemente, si el cuarto diagrama conmuta para $n \geq 0$).

Definiciones "matriciales":

$$
B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} H & K\ominus H \end{array} \\ \begin{array}{c} H' \\ K'\ominus H' \end{array} & \begin{bmatrix} A & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \end{array}
\qquad
B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} H & K\ominus H \end{array} \\ \begin{array}{c} H' \\ K'\ominus H' \end{array} & \begin{bmatrix} A & 0 \\ * & * \end{bmatrix} \end{array}
\qquad
B = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & A & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "A"] \arrow[d, hook] & H' \arrow[d, hook] \\
K \arrow[r, "B"] & K'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \arrow[d, hook] & H' \arrow[l, "A^*"'] \arrow[d, hook] \\
K & K' \arrow[l, "B^*"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "A"] & H' \\
K \arrow[u, two heads, "P_H"] \arrow[r, "B"] & K' \arrow[u, two heads, "P_{H'}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "A^n"] \arrow[d, hook] & H \\
K \arrow[r, "B^n"] & K \arrow[u, two heads, "P_H"']
\end{tikzcd}
$$

1. B es una *extensión* de A si $B|H = A$ (equivalentemente, si el primer diagrama conmuta).
2. B es una *elevación* de A si B^* es una *extensión* de A^* (equivalentemente, si el segundo o tercer diagrama conmuta). Esto es equivalente a $P_H B = A P_H$.
3. Si $H = H'$ y $K = K'$, decimos que B es una dilatación de A si $A^n = P_H B^n|H$, para $n \geq 0$ (equivalentemente, si el cuarto diagrama conmuta para $n \geq 0$).

Definiciones "matriciales":

$$
B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} H & K\ominus H \end{array} \\ \begin{array}{c} H' \\ K'\ominus H' \end{array} & \begin{bmatrix} A & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \end{array}
\qquad
B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} H & K\ominus H \end{array} \\ \begin{array}{c} H' \\ K'\ominus H' \end{array} & \begin{bmatrix} A & 0 \\ * & * \end{bmatrix} \end{array}
\qquad
B = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & A & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}
$$

Espacios de Hardy H^2 con valores vectoriales

$$L^2(\mathscr{U}) = \left\{ f : \mathbb{T} \to \mathscr{U} : \|f\|^2_{L^2(\mathscr{U})} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(e^{it})\|^2 \, dt < \infty \right\}.$$

Serie de Fourier para $f \in L^2(\mathscr{U})$:

$$f(e^{it}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}, \qquad c_n \in \mathscr{U}, \qquad \langle c_n, u\rangle_{\mathscr{U}} = \langle f, e^{int}u\rangle_{L^2(\mathscr{U})}.$$

$$H^2(\mathscr{U}) = \left\{ g : \mathbb{D} \to \mathscr{U} \text{ analíticas} : \|g\|^2_{H^2(\mathscr{U})} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|g(re^{it})\|^2 \, dt < \infty \right\}.$$

Serie de potencias para $g \in H^2(\mathscr{U})$:

$$g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n, \qquad a_n \in \mathscr{U}, \qquad \|g\|^2_{H^2(\mathscr{U})} = \sum_{n\geq 0} \|a_n\|^2_{\mathscr{U}}.$$

Si $g \in H^2(\mathscr{U})$, entonces existe el límite no tangencial $f(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} g(re^{it})$ c.t.p. Permite identificar $H^2(\mathscr{U})$ con un subespacio de $L^2(\mathscr{U})$.

Espacios de Hardy H^2 con valores vectoriales

$$L^2(\mathscr{U}) = \left\{ f : \mathbb{T} \to \mathscr{U} \,:\, \|f\|^2_{L^2(\mathscr{U})} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f(e^{it})\|^2\, dt < \infty \right\}.$$

Serie de Fourier para $f \in L^2(\mathscr{U})$:

$$f(e^{it}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}, \qquad c_n \in \mathscr{U}, \qquad \langle c_n, u\rangle_{\mathscr{U}} = \langle f, e^{int}u\rangle_{L^2(\mathscr{U})}.$$

$$H^2(\mathscr{U}) = \left\{ g : \mathbb{D} \to \mathscr{U} \text{ analíticas} : \|g\|^2_{H^2(\mathscr{U})} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|g(re^{it})\|^2\, dt < \infty \right\}.$$

Serie de potencias para $g \in H^2(\mathscr{U})$:

$$g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n, \qquad a_n \in \mathscr{U}, \qquad \|g\|^2_{H^2(\mathscr{U})} = \sum_{n\geq 0} \|a_n\|^2_{\mathscr{U}}.$$

Si $g \in H^2(\mathscr{U})$, entonces existe el límite no tangencial $f(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} g(re^{it})$ c.t.p.
Permite identificar $H^2(\mathscr{U})$ con un subespacio de $L^2(\mathscr{U})$.

$$L^2(\mathscr{U}) = \left\{ f : \mathbb{T} \to \mathscr{U} : \|f\|^2_{L^2(\mathscr{U})} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(e^{it})\|^2 \, dt < \infty \right\}.$$

Serie de Fourier para $f \in L^2(\mathscr{U})$:

$$f(e^{it}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}, \qquad c_n \in \mathscr{U}, \qquad \langle c_n, u \rangle_{\mathscr{U}} = \langle f, e^{int} u \rangle_{L^2(\mathscr{U})}.$$

$$H^2(\mathscr{U}) = \left\{ g : \mathbb{D} \to \mathscr{U} \text{ analíticas} : \|g\|^2_{H^2(\mathscr{U})} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|g(re^{it})\|^2 \, dt < \infty \right\}.$$

Serie de potencias para $g \in H^2(\mathscr{U})$:

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \qquad a_n \in \mathscr{U}, \qquad \|g\|^2_{H^2(\mathscr{U})} = \sum_{n \geq 0} \|a_n\|^2_{\mathscr{U}}.$$

Si $g \in H^2(\mathscr{U})$, entonces existe el límite no tangencial $f(e^{it}) = \lim_{r \to 1^-} g(re^{it})$ c.t.p. Permite identificar $H^2(\mathscr{U})$ con un subespacio de $L^2(\mathscr{U})$.

$$H^\infty(\mathscr{U},\mathscr{Y}) = \left\{ \Theta : \mathbb{D} \to \mathcal{B}(\mathscr{U},\mathscr{Y}) \text{ analíticas} : \|\Theta\|_{H^\infty(\mathscr{U},\mathscr{Y})} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{z\in\mathbb{D}} \|\Theta(z)\| < \infty \right\}.$$

Para $\Theta \in H^\infty(\mathscr{U},\mathscr{Y})$, existe el límite fuerte $\lim_{r\to 1^-} \Theta(re^{it})$ c.t.p. Por tanto, induce un operador de multiplicación por Θ, $\Theta : L^2(\mathscr{U}) \to L^2(\mathscr{Y})$, mediante $(\Theta f)(e^{it}) = \Theta(e^{it})f(e^{it})$. La restricción de este operador a $H^2(\mathscr{U})$ es el operador $\Theta : H^2(\mathscr{U}) \to H^2(\mathscr{Y})$ dado por $(\Theta g)(z) = \Theta(z)g(z)$.

Θ se dice *función analítica contractiva* si $\Theta(z)$ es contracción $\forall z \in \mathbb{D}$. Θ se dice *interna* si $\Theta(e^{it})$ es isometría c.t.p. $\mathbb{T}$ (equivalentemente, si $\Theta : H^2(\mathscr{U}) \to H^2(\mathscr{Y})$ es isometría).

$$H^\infty(\mathscr{U},\mathscr{Y}) = \left\{\Theta : \mathbb{D} \to \mathcal{B}(\mathscr{U},\mathscr{Y}) \text{ analíticas} : \|\Theta\|_{H^\infty(\mathscr{U},\mathscr{Y})} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{z\in\mathbb{D}} \|\Theta(z)\| < \infty\right\}.$$

Para $\Theta \in H^\infty(\mathscr{U},\mathscr{Y})$, existe el límite fuerte $\lim_{r\to 1^-} \Theta(re^{it})$ c.t.p. Por tanto, induce un operador de multiplicación por Θ, $\Theta : L^2(\mathscr{U}) \to L^2(\mathscr{Y})$, mediante $(\Theta f)(e^{it}) = \Theta(e^{it})f(e^{it})$. La restricción de este operador a $H^2(\mathscr{U})$ es el operador $\Theta : H^2(\mathscr{U}) \to H^2(\mathscr{Y})$ dado por $(\Theta g)(z) = \Theta(z)g(z)$.

Θ se dice *función analítica contractiva* si $\Theta(z)$ es contracción $\forall z \in \mathbb{D}$. Θ se dice *interna* si $\Theta(e^{it})$ es isometría c.t.p. $\mathbb{T}$ (equivalentemente, si $\Theta : H^2(\mathscr{U}) \to H^2(\mathscr{Y})$ es isometría).

Dilatación isométrica de contracciones

Teorema (Sz.-Nagy)

Cualquier contración $T \in \mathcal{B}(H)$ puede ser elevada a una isometría $V \in \mathcal{B}(K_+)$. Esta elevación puede elegirse mínima, en el sentido de que

$$K_+ = \bigvee_{n \geq 0} V^n H.$$

Además, cualquier par de dilataciones isométricas mínimas de T son isomorfas. En particular, cualquier dilatación isométrica mínima de T es de hecho una elevación.

Dilatación unitaria de contracciones

Teorema (Sz.-Nagy)

Cualquier contracción $T \in \mathcal{B}(H)$ *puede ser dilatada a un unitario* $U \in \mathcal{B}(K)$. *Esta dilatación puede elegirse mínima, en el sentido de que*

$$K = \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} U^n H. \tag{1}$$

Si ponemos

$$K_+ = \bigvee_{n \geq 0} U^n H, \tag{2}$$

entonces $U_+ = U | K_+$ *es la dilatación isométrica mínima de* T. *Además, cualquier par de dilataciones unitarias mínimas de* T *son isomorfas.*

Modelo funcional de Sz.-Nagy–Foias: ingredientes

Una contracción $T \in \mathcal{B}(H)$ es completamente no unitaria (c.n.u.) si ningún subespacio no trivial de H reduce T a un operador unitario. Cualquier contracción es suma directa de una contracción c.n.u. y un unitario.

Si $T \in \mathcal{B}(H)$ es contracción, entonces $I - T^*T \geq 0$. Podemos definir el operador defecto $D_T = (I - T^*T)^{1/2}$ y el espacio defecto $\mathfrak{D}_T = \overline{D_T H}$.

Definimos la función característica de una contracción T mediante $\Theta_T(z) = [-T + zD_{T^*}(I - zT^*)^{-1}D_T]|\mathfrak{D}_T$ es una función analítica contractiva en $H^\infty(\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*})$. Un caso importante es cuando es interna (contracción $C_{\cdot 0}$).

Definimos $\Delta(e^{it}) = (I - \Theta_T(e^{it})^*\Theta_T(e^{it}))^{\frac{1}{2}}$ y denotamos por Δ el operador de multipliación por $\Delta(e^{it})$ en $L^2(\mathfrak{D}_T)$. Observación: $\Delta = 0$ is Θ_T es interna.

Una contracción $T \in \mathcal{B}(H)$ es completamente no unitaria (c.n.u.) si ningún subespacio no trivial de H reduce T a un operador unitario. Cualquier contracción es suma directa de una contracción c.n.u. y un unitario.

Si $T \in \mathcal{B}(H)$ es contracción, entonces $I - T^*T \geq 0$. Podemos definir el operador defecto $D_T = (I - T^*T)^{1/2}$ y el espacio defecto $\mathfrak{D}_T = \overline{D_T H}$.

Definimos la función característica de una contracción T mediante $\Theta_T(z) = [-T + zD_{T^*}(I - zT^*)^{-1}D_T]|\mathfrak{D}_T$ es una función analítica contractiva en $H^\infty(\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*})$. Un caso importante es cuando es interna (contracción $C_{\cdot 0}$).

Definimos $\Delta(e^{it}) = (I - \Theta_T(e^{it})^*\Theta_T(e^{it}))^{\frac{1}{2}}$ y denotamos por Δ el operador de multipliación por $\Delta(e^{it})$ en $L^2(\mathfrak{D}_T)$. Observación: $\Delta = 0$ is Θ_T es interna.

Una contracción $T \in \mathcal{B}(H)$ es completamente no unitaria (c.n.u.) si ningún subespacio no trivial de H reduce T a un operador unitario. Cualquier contracción es suma directa de una contracción c.n.u. y un unitario.

Si $T \in \mathcal{B}(H)$ es contracción, entonces $I - T^*T \geq 0$. Podemos definir el operador defecto $D_T = (I - T^*T)^{1/2}$ y el espacio defecto $\mathfrak{D}_T = \overline{D_T H}$.

Definimos la función característica de una contracción T mediante $\Theta_T(z) = [-T + zD_{T^*}(I - zT^*)^{-1}D_T]|\mathfrak{D}_T$ es una función analítica contractiva en $H^\infty(\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*})$. Un caso importante es cuando es interna (contracción $C_{\cdot 0}$).

Definimos $\Delta(e^{it}) = (I - \Theta_T(e^{it})^*\Theta_T(e^{it}))^{\frac{1}{2}}$ y denotamos por Δ el operador de multipliación por $\Delta(e^{it})$ en $L^2(\mathfrak{D}_T)$. Observación: $\Delta = 0$ is Θ_T es interna.

Una contracción $T \in \mathcal{B}(H)$ es completamente no unitaria (c.n.u.) si ningún subespacio no trivial de H reduce T a un operador unitario. Cualquier contracción es suma directa de una contracción c.n.u. y un unitario.

Si $T \in \mathcal{B}(H)$ es contracción, entonces $I - T^*T \geq 0$. Podemos definir el operador defecto $D_T = (I - T^*T)^{1/2}$ y el espacio defecto $\mathfrak{D}_T = \overline{D_T H}$.

Definimos la función característica de una contracción T mediante $\Theta_T(z) = [-T + zD_{T^*}(I - zT^*)^{-1}D_T]|\mathfrak{D}_T$ es una función analítica contractiva en $H^\infty(\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*})$. Un caso importante es cuando es interna (contracción $C_{\cdot 0}$).

Definimos $\Delta(e^{it}) = (I - \Theta_T(e^{it})^*\Theta_T(e^{it}))^{\frac{1}{2}}$ y denotamos por Δ el operador de multipliación por $\Delta(e^{it})$ en $L^2(\mathfrak{D}_T)$. Observación: $\Delta = 0$ is Θ_T es interna.

Teorema (Sz.-Nagy–Foiaş)

Sea T una contracción c.n.u. en un espacio de Hilbert separable. Ponemos

$$\mathcal{K} = L^2(\mathfrak{D}_{T^*}) \oplus \overline{\Delta L^2(\mathfrak{D}_T)}, \qquad \mathcal{K}_+ = H^2(\mathfrak{D}_{T^*}) \oplus \overline{\Delta L^2(\mathfrak{D}_T)},$$

y

$$\mathcal{H} = \mathcal{K}_+ \ominus \{\Theta_T u \oplus \Delta u : u \in H^2(\mathfrak{D}_T)\}.$$

Entonces T es unitariamente equivalente al operador $\mathcal{T}$ en $\mathcal{H}$ definido por

$$(\mathcal{T}^*(u,v))(z) = \left(\frac{u(z)-u(0)}{z}, e^{-it}v(e^{it})\right), \qquad (u,v) \in \mathcal{H}.$$

La dilatación isométrica mínima de $\mathcal{T}$ es el operador $M_z \oplus (M_{e^{it}}|\overline{\Delta L^2(\mathfrak{D}_T)})$ actuando en $\mathcal{K}_+$, y la dilatación unitaria mínima de $\mathcal{T}$ es el operador $M_{e^{it}} \oplus (M_{e^{it}}|\overline{\Delta L^2(\mathfrak{D}_T)})$ actuando en $\mathcal{K}$.

Resumen

Teorema (Elevación del conmutante)

Sean $T \in \mathcal{B}(H)$, $T' \in \mathcal{B}(H')$ dos contracciones y $U_+ \in \mathcal{B}(K_+)$, $U'_+ \in \mathcal{B}(K'_+)$ sus respectivas dilataciones isométricas mínimas. Si $A \in \mathcal{B}(H', H)$ satisface la relación $TA = AT'$, entonces existe un $B \in \mathcal{B}(K'_+, K_+)$ que es una elevación de A, y tal que $U_+B = BU'_+$ y $\|A\| = \|B\|$.

$$
\begin{tikzcd}
H' \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "T'"] & & H \arrow[dr, "T"] & \\
& H' \arrow[rr, "A"] & & H \\
K'_+ \arrow[uu, two heads] \arrow[rr, dashed, "B"] \arrow[dr, "U'_+"] & & K_+ \arrow[uu, two heads] \arrow[dr, "U_+"] & \\
& K'_+ \arrow[uu, two heads] \arrow[rr, dashed, "B"] & & K_+ \arrow[uu, two heads]
\end{tikzcd}
$$

Decimos que $\{T_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{B}(H)$ es un sistema conmutativo de operadores si $T_j T_{j'} = T_{j'} T_j$, $\forall j, j' \in J$.

Generalización de extensión/elevación: $\{V_j\}_{j\in J}$ es una extensión/elevación conmutativa de $\{T_j\}_{j\in J}$ si es un sistema conmutativo y V_j es una extensión/lifting de T_j para todo $j \in J$.

Generalización de dilatación: $\{V_j\}_{j\in J}$ es un dilatación conmutativa de $\{T_j\}_{j\in J}$ si es un sistema conmutativo y

$$T_{j_1}^{k_1} \cdots T_{j_n}^{k_n} = P_H V_{j_1}^{k_1} \cdots V_{j_n}^{k_n} | H, \qquad n \in \mathbb{N},\ k_1, \ldots, k_n \geq 0,\ j_1, \ldots, j_n \in J.$$

Decimos que $\{T_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{B}(H)$ es un sistema conmutativo de operadores si $T_j T_{j'} = T_{j'} T_j, \forall j, j' \in J$.

Generalización de extensión/elevación: $\{V_j\}_{j\in J}$ es una extensión/elevación conmutativa de $\{T_j\}_{j\in J}$ si es un sistema conmutativo y V_j es una extensión/lifting de T_j para todo $j \in J$.

Generalización de dilatación: $\{V_j\}_{j\in J}$ es un dilatación conmutativa de $\{T_j\}_{j\in J}$ si es un sistema conmutativo y

$$T_{j_1}^{k_1} \cdots T_{j_n}^{k_n} = P_H V_{j_1}^{k_1} \cdots V_{j_n}^{k_n} | H, \qquad n \in \mathbb{N},\ k_1, \dots, k_n \geq 0,\ j_1, \dots, j_n \in J.$$

Decimos que $\{T_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{B}(H)$ es un sistema conmutativo de operadores si $T_j T_{j'} = T_{j'} T_j, \forall j, j' \in J$.

Generalización de extensión/elevación: $\{V_j\}_{j\in J}$ es una extensión/elevación conmutativa de $\{T_j\}_{j\in J}$ si es un sistema conmutativo y V_j es una extensión/lifting de T_j para todo $j \in J$.

Generalización de dilatación: $\{V_j\}_{j\in J}$ es un dilatación conmutativa de $\{T_j\}_{j\in J}$ si es un sistema conmutativo y

$$T_{j_1}^{k_1} \cdots T_{j_n}^{k_n} = P_H V_{j_1}^{k_1} \cdots V_{j_n}^{k_n} | H, \qquad n \in \mathbb{N},\ k_1, \ldots, k_n \geq 0,\ j_1, \ldots, j_n \in J.$$

Teorema (Andô)

Toda pareja de contracciones $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(H)$ que conmutan tienen una elevación isométrica conmutativa V_1, V_2 y una dilatación unitaria conmutativa U_1, U_2.

Idea de la prueba

Existencia de V_1, V_2.

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[rr, "T_2"] \arrow[dr, "T_1"] & & H \arrow[dr, "T_1"] & \\
& H \arrow[rr, "T_2"] & & H \\
K_+ \arrow[uu, two heads] \arrow[rr, dashed, "B"] \arrow[dr, "U_+"] & & K_+ \arrow[uu, two heads, crossing over] \arrow[dr, "U_+"] & \\
& K_+ \arrow[uu, two heads, crossing over] \arrow[rr, dashed, "B"] & & K_+ \arrow[uu, two heads] \\
K \arrow[uu, two heads] \arrow[rr, "V_2"] \arrow[dr, dashed, "V_1"] & & K \arrow[uu, two heads] \arrow[dr, dashed, "V_1"] & \\
& K \arrow[uu, two heads, crossing over] \arrow[rr, "V_2"] & & K \arrow[uu, two heads]
\end{tikzcd}
$$

Dado $T \in \mathcal{B}(H)$ y $p \in M_s[z]$, $p(z) = [p_{jk}(z)]_{j,k=1}^s$, podemos formar el operador $p(T) \in \mathcal{B}(H^s)$ definido por $p(T) = [p_{jk}(T)]_{j,k=1}^s$.

Si $T \in \mathcal{B}(H)$ es una contracción, se tiene

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_{H^\infty(\mathbb{C}^s,\mathbb{C}^s)} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{z\in\mathbb{D}} \|p(z)\|, \qquad \forall p \in M_s[z].$$

Prueba: Sea U una dilatación unitaria de T.

$$\|p(T)\| = \|[P_H p_{jk}(U)|H]_{jk=1}^s\| \leq \|[p_{jk}(U)]_{jk=1}^s\| = \|p(U)\| \leq \|p\|_{H^\infty(\mathbb{C}^s,\mathbb{C}^s)}$$

¿Es cierta la siguiente generalización para una tupla conmutativa $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{B}(H)$?

$$\|p(T_1, \ldots, T_n)\| \leq \sup_{z_1,\ldots,z_n\in\mathbb{D}} \|p(z)\|, \qquad \forall p \in M_s[z_1, \ldots, z_n]. \qquad (*)$$

Para $n = 2$, sí, por Andô. En general, $(*)$ es cierta para todo $s \geq 1$ si y solo si $T_1, \ldots, T_n$ tiene una dilatación unitaria conmutativa (consecuencia del teorema de Arveson).

La desigualdad de von Neumann

Dado $T \in \mathcal{B}(H)$ y $p \in M_s[z]$, $p(z) = [p_{jk}(z)]_{j,k=1}^s$, podemos formar el operador $p(T) \in \mathcal{B}(H^s)$ definido por $p(T) = [p_{jk}(T)]_{j,k=1}^s$.

Si $T \in \mathcal{B}(H)$ es una contracción, se tiene

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_{H^\infty(\mathbb{C}^s,\mathbb{C}^s)} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{z\in\mathbb{D}} \|p(z)\|, \qquad \forall p \in M_s[z].$$

Prueba: Sea U una dilatación unitaria de T.

$$\|p(T)\| = \|[P_H p_{jk}(U)|H]_{jk=1}^s\| \leq \|[p_{jk}(U)]_{jk=1}^s\| = \|p(U)\| \leq \|p\|_{H^\infty(\mathbb{C}^s,\mathbb{C}^s)}$$

¿Es cierta la siguiente generalización para una tupla conmutativa $T_1,\dots,T_n \in \mathcal{B}(H)$?

$$\|p(T_1,\dots,T_n)\| \leq \sup_{z_1,\dots,z_n\in\mathbb{D}} \|p(z)\|, \qquad \forall p \in M_s[z_1,\dots,z_n]. \qquad (*)$$

Para $n = 2$, sí, por Andô. En general, $(*)$ es cierta para todo $s \geq 1$ si y solo si $T_1,\dots,T_n$ tiene una dilatación unitaria conmutativa (consecuencia del teorema de Arveson).

Dado $T \in \mathcal{B}(H)$ y $p \in M_s[z]$, $p(z) = [p_{jk}(z)]_{j,k=1}^s$, podemos formar el operador $p(T) \in \mathcal{B}(H^s)$ definido por $p(T) = [p_{jk}(T)]_{j,k=1}^s$.

Si $T \in \mathcal{B}(H)$ es una contracción, se tiene

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_{H^\infty(\mathbb{C}^s,\mathbb{C}^s)} \overset{\text{def}}{=} \sup_{z\in\mathbb{D}} \|p(z)\|, \qquad \forall p \in M_s[z].$$

Prueba: Sea U una dilatación unitaria de T.

$$\|p(T)\| = \|[P_H p_{jk}(U)|H]_{jk=1}^s\| \leq \|[p_{jk}(U)]_{jk=1}^s\| = \|p(U)\| \leq \|p\|_{H^\infty(\mathbb{C}^s,\mathbb{C}^s)}$$

¿Es cierta la siguiente generalización para una tupla conmutativa $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{B}(H)$?

$$\|p(T_1, \ldots, T_n)\| \leq \sup_{z_1,\ldots,z_n\in\mathbb{D}} \|p(z)\|, \qquad \forall p \in M_s[z_1, \ldots, z_n]. \qquad (*)$$

Para $n = 2$, sí, por Andô. En general, $(*)$ es cierta para todo $s \geq 1$ si y solo si $T_1, \ldots, T_n$ tiene una dilatación unitaria conmutativa (consecuencia del teorema de Arveson).

Dado $T \in \mathcal{B}(H)$ y $p \in M_s[z]$, $p(z) = [p_{jk}(z)]_{j,k=1}^s$, podemos formar el operador $p(T) \in \mathcal{B}(H^s)$ definido por $p(T) = [p_{jk}(T)]_{j,k=1}^s$.

Si $T \in \mathcal{B}(H)$ es una contracción, se tiene

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_{H^\infty(\mathbb{C}^s,\mathbb{C}^s)} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{z\in\mathbb{D}} \|p(z)\|, \qquad \forall p \in M_s[z].$$

Prueba: Sea U una dilatación unitaria de T.

$$\|p(T)\| = \|[P_H p_{jk}(U)|H]_{jk=1}^s\| \leq \|[p_{jk}(U)]_{jk=1}^s\| = \|p(U)\| \leq \|p\|_{H^\infty(\mathbb{C}^s,\mathbb{C}^s)}$$

¿Es cierta la siguiente generalización para una tupla conmutativa $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{B}(H)$?

$$\|p(T_1, \dots, T_n)\| \leq \sup_{z_1,\dots,z_n\in\mathbb{D}} \|p(z)\|, \qquad \forall p \in M_s[z_1, \dots, z_n]. \qquad (*)$$

Para $n = 2$, sí, por Andô. En general, $(*)$ es cierta para todo $s \geq 1$ si y solo si $T_1, \dots, T_n$ tiene una dilatación unitaria conmutativa (consecuencia del teorema de Arveson).

Contraejemplos

- Parrott, 1970. Ejemplo de tres contracciones que conmutan y no tienen dilatación unitaria conmutativa. Sí cumplen la desigualdad de von Neumann para $s = 1$.
- Kaijser y Varopoulos, 1974. Ejemplo de tres matrices contractivas 5×5 que no cumplen la desigualdad para $s = 1$.
- Lotto y Steger, 1994. Ejemplo con matrices diagonalizables.
- Choi y Davidson, 2013. Ejemplo de cuatro matrices 3×3 que no cumplen la desigualdad de von Neumann para $s = 2$.
- Para matrices 2×2 siempre existe la dilatación unitaria conmutativa.
- No se sabe qué pasa para tres matrices 3×3. No se sabe si las matrices 3×3 satisfacen la desigualdad de von Neumann para $s = 1$.
- Para $n \geq 3$, no se sabe si la desigualdad de von Neumann es cierta para todo s y toda tupla conmutativa de contracciones $T_1, \dots, T_n$ si se permite una constante $C = C(n)$ en el lado derecho.

Resumen

Estructuras separadas

Una *estructura separada* es un espacio de Hilbert K con una descomposición

$$K = H_{0,-} \oplus M_- \oplus M_+ \oplus H_{0,+}$$

tal que $M = M_- + M_+$ es finito-dimensional y un par de operadores autoadjuntos $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(K)$ que conmutan y tienen una estructura

$$A_j = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}, \qquad j = 1, 2.$$

Dada una estructura separada, existen matrices autoadjuntas $\sigma_1, \sigma_2, \gamma \in \mathcal{B}(M)$ tales que se tiene la relación

$$\sigma_2 P_M A_1 - \sigma_1 P_M A_2 + \gamma P_M = 0.$$

Esto permite considerar la curva algebraica real

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : \det(x_1\sigma_2 - x_2\sigma_1 + \gamma) = 0\}.$$

El espectro conjunto de (A_1, A_2) está contenido en la parte real de la curva, es decir, $X \cap \mathbb{R}^2$.

Estructuras separadas

Una *estructura separada* es un espacio de Hilbert K con una descomposición

$$K = H_{0,-} \oplus M_- \oplus M_+ \oplus H_{0,+}$$

tal que $M = M_- + M_+$ es finito-dimensional y un par de operadores autoadjuntos $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(K)$ que conmutan y tienen una estructura

$$A_j = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}, \qquad j = 1, 2.$$

Dada una estructura separada, existen matrices autoadjuntas $\sigma_1, \sigma_2, \gamma \in \mathcal{B}(M)$ tales que se tiene la relación

$$\sigma_2 P_M A_1 - \sigma_1 P_M A_2 + \gamma P_M = 0.$$

Esto permite considerar la curva algebraica real

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : \det(x_1\sigma_2 - x_2\sigma_1 + \gamma) = 0\}.$$

El espectro conjunto de (A_1, A_2) está contenido en la parte real de la curva, es decir, $X \cap \mathbb{R}^2$.

Consideramos $\widehat{X}$ la desingularización de X. Podemos entender $\widehat{X}$ como una superficie de Riemann que se obtiene pegando un número finito de puntos a los puntos regulares de X. Un caso importante es cuando la parte real de la curva divide cada componente de $\widehat{X}$ en dos componentes conexas llamadas *mitades*.

En el caso de estructuras separadas, la curva algebraica asociada es separada si asumen ciertas hipótesis débiles.

Cuando la curva es separada, debería ser posible construir un modelo analítico para los operadores (A_1, A_2) empleando los espacios de Hardy H^2 en las mitades de la curva.

Curvas algebraicas separadas

Consideramos $\widehat{X}$ la desingularización de X. Podemos entender $\widehat{X}$ como una superficie de Riemann que se obtiene pegando un número finito de puntos a los puntos regulares de X. Un caso importante es cuando la parte real de la curva divide cada componente de $\widehat{X}$ en dos componentes conexas llamadas *mitades*.

En el caso de estructuras separadas, la curva algebraica asociada es separada si asumen ciertas hipótesis débiles.

Cuando la curva es separada, debería ser posible construir un modelo analítico para los operadores (A_1, A_2) empleando los espacios de Hardy H^2 en las mitades de la curva.

Consideramos $\widehat{X}$ la desingularización de X. Podemos entender $\widehat{X}$ como una superficie de Riemann que se obtiene pegando un número finito de puntos a los puntos regulares de X. Un caso importante es cuando la parte real de la curva divide cada componente de $\widehat{X}$ en dos componentes conexas llamadas *mitades*.

En el caso de estructuras separadas, la curva algebraica asociada es separada si asumen ciertas hipótesis débiles.

Cuando la curva es separada, debería ser posible construir un modelo analítico para los operadores (A_1, A_2) empleando los espacios de Hardy H^2 en las mitades de la curva.

Se encarga de estudiar pares de operadores A_1, A_2 que conmutan y tales que el rango de $\operatorname{Im} A_j \stackrel{\text{def}}{=} (A_j - A_j^*)/2i$ es finito. Estos operadores A_1, A_2 se incorporan en una estructura llamada *vasija* que depende de unas matrices autoadjuntas $\sigma_1, \sigma_2, \gamma^{\text{in}}, \gamma^{\text{out}}$. Se asocia una una curva algebraica a la vasija dada por la ecuación

$$\det(x_1\sigma_2 - x_2\sigma_1 + \gamma^{\text{in}}) = \det(x_1\sigma_2 - x_2\sigma_1 + \gamma^{\text{out}}) = 0.$$

(ambos polinomios son el mismo). El espectro conjunto de (A_1, A_2) está contenido en la parte real de la curva salvo por un número finito de puntos.

Dados operadores autoadjuntos $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(K)$ incluídos en dos estructuras separadas con descomposiciones

$$K = \overbrace{H_{0,-} \oplus M_-}^{H_-} \oplus \overbrace{M_+ \oplus H_{0,+}}^{H_+},$$

$$K = \overbrace{\widehat{H}_{0,-} \oplus \widehat{M}_-}^{\widehat{H}_-} \oplus \overbrace{\widehat{M}_+ \oplus \widehat{H}_{0,+}}^{\widehat{H}_+},$$

con $H_- \subset \widehat{H}_-$ y $\widehat{H}_+ \subset H_+$, se puede realizar una compresión generalizada de A_1, A_2 a operadores $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2$ en el espacio cociente $H_+/\widehat{H}_+ \cong \widehat{H}_-/H_-$. Los operadores $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2$ están incluídos en una vasija con las mismas matrices σ_1, σ_2 que las asociadas a la estructura separada y $\gamma^{\text{out}} = \gamma$.

La relación con la teoría de Livšic-Vinnikov

Se encarga de estudiar pares de operadores A_1, A_2 que conmutan y tales que el rango de $\operatorname{Im} A_j \stackrel{\text{def}}{=} (A_j - A_j^*)/2i$ es finito. Estos operadores A_1, A_2 se incorporan en una estructura llamada *vasija* que depende de unas matrices autoadjuntas $\sigma_1, \sigma_2, \gamma^{\text{in}}, \gamma^{\text{out}}$. Se asocia una una curva algebraica a la vasija dada por la ecuación

$$\det(x_1\sigma_2 - x_2\sigma_1 + \gamma^{\text{in}}) = \det(x_1\sigma_2 - x_2\sigma_1 + \gamma^{\text{out}}) = 0.$$

(ambos polinomios son el mismo). El espectro conjunto de (A_1, A_2) está contenido en la parte real de la curva salvo por un número finito de puntos.

Dados operadores autoadjuntos $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(K)$ incluídos en dos estructuras separadas con descomposiciones

$$K = \overbrace{H_{0,-} \oplus M_-}^{H_-} \oplus \overbrace{M_+ \oplus H_{0,+}}^{H_+},$$

$$K = \overbrace{\widehat{H}_{0,-} \oplus \widehat{M}_-}^{\widehat{H}_-} \oplus \overbrace{\widehat{M}_+ \oplus \widehat{H}_{0,+}}^{\widehat{H}_+},$$

con $H_- \subset \widehat{H}_-$ y $\widehat{H}_+ \subset H_+$, se puede realizar una compresión generalizada de A_1, A_2 a operadores $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2$ en el espacio cociente $H_+/\widehat{H}_+ \cong \widehat{H}_-/H_-$. Los operadores $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2$ están incluídos en una vasija con las mismas matrices σ_1, σ_2 que las asociadas a la estructura separada y $\gamma^{\text{out}} = \gamma$.