Interpolación en Espacios de Hardy

Daniel Estévez Sánchez

29 de diciembre de 2011

Índice

1. Introducción

En este trabajo trataremos como tema central el teorema de Shapiro-Shields sobre interpolación con pesos en espacios de Hardy en el disco. Se verán en distinto detalle algunas de las pruebas existentes para dicho teorema.

En la sección 2, hacemos un breve resumen de la teoría de espacios de Hardy. Esta sección puede ser omitida en una primera lectura, ya que su objetivo principal es fijar la notación y servir de referencia.

La sección 3 se encarga del teorema de interpolación con pesos. El objetivo principal en esta sección será probar el teorema de Shapiro-Shields, viendo algunas de las distintas pruebas que existen. También se introducirán otras nociones importantes, como las medidas de Carleson y los embebimientos de espacios de Hardy.

En la sección 4 mostramos una aplicación del teorema de Shapiro-Shields a la teoría espectral de operadores. Probamos que el problema de comprobar si la familia de autovectores de cierto operador es equivalente a una base ortonormal puede reducirse a un problema de interpolación con pesos. Este tipo de resultados son de cierta relevancia en la teoría de operadores. Algunas preguntas sobre operadores se trasladan a ciertos operadores que actúan sobre espacios de funciones analíticas. Después, estas preguntas se intentan responder empleando técnicas de la variable compleja.

Por último, en la sección 5 estudiamos con más detalle la condición de Carleson, una condición geométrica sobre los puntos de interpolación que es equivalente a la propiedad de interpolación libre. Mostraremos algunos resultados adicionales con el objetivo de ganar mayor intuición geométrica sobre la condición de Carleson.

2. Resumen de espacios de Hardy

En esta sección haremos un breve repaso de la definición y propiedades básicas de los espacios de Hardy. Introduciremos también ciertos resultados que vamos a necesitar, como son la factorización mediante productos de Blaschke y algunos resultados de dualidad. Una buena introducción a los espacios de Hardy puede leerse en [3] o en [2].

Denotaremos el disco unidad por $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y su frontera por $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Escribiremos como $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ el semiplano superior. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto, denotaremos por $\mathcal{H}(\Omega)$ el conjunto de funciones holomorfas en Ω.

2.1. Definición y propiedades básicas

Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, definimos para $0 < p < \infty$

$$M_p(r, f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Entonces, definimos el espacio de Hardy H^p en el disco unidad como

$$H^p = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \sup_{0<r<1} M_p(r, f) < \infty \right\}.$$

Para $p = \infty$, se define

$$H^\infty = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \text{ acotadas}\},$$

Puede probarse que $M_p(r, f)$ es no decreciente con r. Si $0 < p < \infty$, definimos para $f \in H^p$

$$\|f\|_p = \sup_{0<r<1} M_p(r, f) = \lim_{r\to 1^-} M_p(r, f),$$

y para $f \in H^\infty$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|.$$

Esto define una norma para $1 \leq p \leq \infty$, con la cual H^p es un espacio de Banach. Si $0 < p < 1$, puede definirse a partir de $\|\cdot\|_p^p$ una métrica invariante por traslación con la cual H^p es un espacio métrico completo.

Si $\zeta = e^{i\theta_0} \in \mathbb{T}$, decimos que $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ tiende a ζ *no tangencialmente* si $|\theta - \theta_0| \leq c(1 - r)$ para algún $c > 0$ idependiente de z. Geométricamente, esto corresponde a z que se mantenga dentro de un ángulo de apertura menor que π, con vértice en ζ y simétrico respecto del radio que une 0 con ζ. Este ángulo se denomina ángulo de Stolz.

Si $f \in H^p$, $0 < p \leq \infty$, existe el límite de $f(z)$ cuando $z \to \zeta$ no tangencialmente para casi todo $\zeta \in \mathbb{T}$. De esta forma, $\tilde{f}(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$ define una función en casi todo punto de $\mathbb{T}$. Además, $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{T})$.

Si ponemos $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$, para $0 < p < \infty$, $f_r \to \tilde{f}$ en L^p cuando $r \to 1^-$. Para $p = \infty$, solo se tiene $f_r \xrightarrow{w^*} \tilde{f}$ en L^∞. Esto es,

$$\int_0^{2\pi} f_r(e^{it})g(e^{it})dt = \int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{it})g(e^{it})dt,$$

para toda $g \in L^1(\mathbb{T})$.

En particular, si $1 \leq p \leq \infty$, $\|f\|_{H^p} = \|\tilde{f}\|_{L^p}$. Además, f puede recuperarse a partir de $\tilde{f}$ mediante una convolución con el núcleo de Poisson. Se define el núcleo de Poisson como

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos t}.$$

Entonces,

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\tilde{f}(t)dt.$$

También es cierta la siguiente versión de la fórmula integral de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)}{w - z}dw = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})e^{it}}{e^{it} - z}dt.$$

Por tanto, es usual identificar $f \in H^p$ con su función frontera $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{T})$. Mediante esta identificación, H^p es un subespacio cerrado de $L^p(\mathbb{T})$. De hecho, para $1 \leq p \leq \infty$,

$$H^p = \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}) : \int_0^{2\pi} f(t)e^{int}dt = 0,\ n = 1, 2, \dots \right\}.$$

También es usual considerar que f puede extenderse vía límite no tangencial a casi todo punto de $\mathbb{T}$ y emplear el abuso de notación $\tilde{f}(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$.

En el caso especial $p = 2$, H^2 es un espacio de Hilbert. Puede caracterizarse en función de las series de potencias como

$$H^2 = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

De hecho, la aplicación que lleva $f(z) = \sum a_n z^n \in H^2$ a $\{a_n\} \in \ell^2$ es un isomorfismo isométrico.

2.2. Factorización mediante productos de Blaschke

Si $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}$, el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z}_n z}$$

denominado *producto de Blaschke* converge absolutamente si y solo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty.$$

Esta condición se denomina *condición de Blaschke*. Si el producto converge absolutamente, también converge uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$ y por tanto define una función holomorfa $B(z)$. Además, $|B(z)| < 1$, $z \in \mathbb{D}$, por lo que $B \in H^\infty$. Puede probarse que $|B(\zeta)| = 1$ para casi todo $\zeta \in \mathbb{T}$. Por tanto, $\|B\|_\infty = 1$.

Si $f \in H^p$, $0 < p \leq \infty$, $f \neq 0$, puede verse mediante la fórmula de Jensen que los ceros de $f(z)$ cumplen la condición de Blaschke. Por tanto, es posible formar un producto de Blaschke $B(z)$ con sus ceros, quizá agregando un factor z^k adecuado al producto infinito en caso de que $f(z)$ se anule en 0. De esta forma, $f(z)$ factoriza como $f(z) = B(z)g(z)$, y se tiene que g no se anula, $g \in H^p$ y $\|f\|_p = \|g\|_p$, pues $|B(\zeta)| = 1$ para casi todo $\zeta \in \mathbb{T}$.

La factorización de Blaschke se puede emplear para realizar el siguiente truco, que permite pasar de una función en H^p, $0 < p < \infty$, a una en otro H^q, $0 < q < \infty$. Si $f \in H^p$, factorizamos f como arriba. Como g no se anula, puede definirse $h \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ con $h^{\frac{q}{p}} = g$. Entonces se tiene que $f(z) = B(z)h^{\frac{q}{p}}(z)$, $h \in H^q$, y $\|f\|_p^p = \|h\|_q^q$.

Este truco se emplea para probar ciertos resultados para todos los H^p, reduciéndolos al caso de un H^q concreto. Generalmente, el caso $q = 2$ suele ser más fácil, ya que dado que H^2 es de Hilbert uno dispone de herramientas adicionales.

2.3. Dualidad de espacios H^p

Si $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, denotaremos por $\varphi H^p = \{\varphi f : f \in H^p\}$. En particular, zH^p es el espacio de funciones de H^p que se anulan en 0.

Con esta notación, para $1 \leq p < \infty$ y q el exponente dual de p (esto es, $p^{-1} + q^{-1} = 1$), puede identificarse el dual de H^p con el espacio cociente $L^q(\mathbb{T})/zH^q$.

Espacio	Dual
H^p, $1 \le p < \infty$	L^q/zH^q
zH^p, $1 \le p < \infty$	H^q/H^q
L^p/H^p, $1 \le p < \infty$	zH^q
L^p/zH^p, $1 \le p < \infty$	H^q
$\mathcal{C}/\mathcal{A}$	zH^1
$\mathcal{C}/z\mathcal{A}$	H^1

Cuadro 1: Dualidad de espacios H^p

Si $g \in L^q(\mathbb{T})$, $g + zH^q$ actúa en H^p mediante

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})g(e^{it})dt, \quad f \in H^p.$$

Similarmente, pueden calcularse los duales de zH^p, L^p/H^p y L^p/zH^p.

Denotaremos por $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$. Entonces, definimos el álgebra del disco como $\mathcal{A} = \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}$. Con esta notación, el dual de $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ es zH^1.

En el cuadro 1 se muestra una tabla resumiendo los resultados de dualidad para los espacios H^p.

Conviene comentar que ciertos autores consideran la acción de $g \in L^q(\mathbb{T})$ sobre $f \in L^p(\mathbb{T})$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(z)g(z)dz = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})g(e^{it})e^{it}dt.$$

Considerando esta acción, el dual de H^p es L^q/H^q, y uno obtiene resultados más simétricos que los del cuadro 1. En este trabajo, no consideraremos esta acción.

3. El problema de interpolación con pesos en H^p

3.1. Enunciado del problema

El problema de interpolación en el disco mediante funciones acotadas se remonta a Pick y R. Nevanlinna [5]. El problema de interpolación de Nevanlinna-Pick, es el siguiente. Dados, $\{z_n\}_{n=1}^N \subset \mathbb{D}$, $\{w_n\}_{n=1}^N \subset \mathbb{D}$, encontrar una $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ con $|f(z)| \le 1$ y $f(z_n) = w_n$. La condición que garantiza la existencia de esta f fue dada independientemente por Pick y R. Nevanlinna y tiene que ver con la positividad de cierta matriz definida en términos de los z_n y w_n.

Si uno quiere pasar a considerar la interpolación en un número infinito de puntos, puede ser necesario relajar la condición $|f(z)| \le 1$ y pedir solo $f \in H^\infty$. En este caso, se puede pasar a considerar datos $\{w_n\} \in \ell^\infty$.

Definición. Dada $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{D}$ una sucesión de puntos en el disco, decimos que es una *sucesión interpoladora* si para cada sucesión $\{w_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$ existe $f \in H^\infty$ con $f(z_n) = w_n$.

El problema de interpolación acotada en el disco busca caracterizar las sucesiones interpoladoras. Es fácil ver que para que $\{z_n\}$ sea sucesión interpoladora, los puntos z_n han de ser todos distintos y cumplir la condición de Blaschke. Ponemos $w_n = \delta_{n1}$, donde δ_{jk} es la delta de Kronecker, y tomamos $f \in H^\infty$ con $f(z_n) = w_n$. Entonces, $f \neq 0$ y sus ceros han de cumplir la condición de Blaschke. En particular, f se anula en z_n para $n > 1$. Por tanto, $\{z_n\}$ cumplen la condición de Blaschke.

La solución del problema de interpolación acotada viene dada por el siguiente teorema debido a Carleson [1].

Teorema 1 (Carleson)**.** $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{D}$ *es una sucesión interpoladora si y solo si existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\prod_{n\neq k} \frac{|z_n - z_k|}{|1 - \overline{z}_n z_k|} \geq \delta. \tag{C}$$

La condición (C) se denomina *condición de Carleson.* Conviene observar que si $B_n(z)$ es el producto de Blaschke formado por todos los puntos z_k, $k \neq n$, la condición de Carleson es simplemente $|B_n(z_n)| \geq \delta$.

Otra forma de entender la condición de Carleson es observar que el factor que aparece en el producto infinito es la distancia pseudohiperbólica entre z_n y z_k. Por tanto, intuitivamente, la condición de Carleson requiere que los z_n estén suficientemente separados, de forma que los productos de sus distancias pseudohiperbólicas estén uniformemente acotados por debajo.

Más en general, dada $\{z_n\}$ una sucesión de puntos en el disco, uno puede querer estudiar el espacio de trazas de funciones de H^p en dicha sucesión, $H^p(\{z_n\}) = \{f(z_n) : f \in H^p\}$. Con este lenguaje, una sucesión $\{z_n\}$ es interpoladora si y solo si $H^\infty(\{z_n\}) = \ell^\infty$ (obsérvese que la inclusión $H^\infty(\{z_n\}) \subset \ell^\infty$ es obvia).

La caracterización de las trazas para las sucesiones que cumplen la condición de Carleson fue dada por Shapiro y Shields en [8]. En este artículo, Shapiro y Shields dan una nueva prueba para el teorema anterior, y consideran una generalización para H^p, $1 \leq p < \infty$, en la forma en que se muestra en el siguiente teorema.

Si $\Lambda = \{z_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de puntos en el disco, consideramos para $0 < p < \infty$ el operador T_Λ^p que lleva $f \in H^p$ en su traza con pesos $T_\Lambda^p f = \{(1 - |z_n|^2)^{\frac{1}{p}} f(z_n)\}$. Para $p = \infty$, T_Λ^∞ lleva $f \in H^\infty$ en $T_\Lambda^\infty f = \{f(z_n)\}$.

Teorema 2 (Shapiro, Shields)**.** *Dada* $\Lambda = \{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{D}$ *y* $1 \leq p \leq \infty$*, se tiene* $T_\Lambda^p H^p = \ell^p$ *si y solo si* $\{z_n\}$ *cumple la condición de Carleson.*

El caso $p = \infty$ es simplemente el teorema 1. El caso $p < \infty$ puede entenderse también como un resultado sobre interpolación con pesos por funciones en H^p. Simplemente afirma que el espacio de sucesiones $\{w_n\}$ tales que se puede encontrar $f \in H^p$ satisfaciendo el problema de interpolación con pesos

$$(1 - |z_n|^2)^{\frac{1}{p}} f(z_n) = w_n \tag{1}$$

es precisamente ℓ^p. Se dice que la interpolación es *libre* si se tiene esta propiedad. Por tanto, el teorema de Shapiro-Shields muestra que la condición de Carleson es equivalnete a tener interpolación libre.

Para $p = \infty$, también puede considerarse este problema de interpolación con pesos, entendiendo que el peso $(1 - |z_n|^2)^{\frac{1}{p}}$ es 1. Durante este trabajo realizaremos el abuso de notación de escribir este peso incluso cuando $p = \infty$, entendiendo que en este caso el peso es simplemente 1.

Nuestro objetivo principal en esta sección es probar el teorema 2, obteniendo así el teorema 1 como caso particular. Conviene observar que para $p < \infty$ la inclusión $T^p_\Lambda H^p \subset \ell^p$ no es obvia. Por tanto, para probar que la condición de Carleson implica la igualdad $T^p_\Lambda H^p = \ell^p$, deberemos probar ambas inclusiones. La idea de Shapiro-Shields es reducir la inclusión $T^p_\Lambda H^p \supset \ell^p$ a la inclusión $T^q_\Lambda H^q \subset \ell^q$ para el exponente dual q. Una vez hecho esto, veremos varias formas para establecer esta última inclusión.

Las pruebas de las dos siguientes subsecciones siguen más o menos los pasos de Koosis [3, capítulo IX], con la diferencia de que Koosis realiza el trabajo en $\mathbb{H}$ y nosotros lo haremos en $\mathbb{D}$. También incorporamos algunas ideas del artículo de Shapiro y Shields [8].

3.2. Condición necesaria

Primero veremos que la condición de Carleson es necesaria para que se tenga $T^p_\Lambda H^p \supset \ell^p$ para algún p. A la hora de trabajar con un problema de interpolación infinito como (1), es muy útil poder expresar dicho problema mediante una serie de problemas de interpolación finitos. El siguiente lema muestra cómo hacerlo.

Necesitamos primero una proposición sobre la acotación puntual de funciones en H^p. Esta proposición es bien conocida y se puede probar reduciendo al caso $p = 2$ mediante factorización. En H^2 es simplemente la desigualdad de Cauchy-Schwarz aplicada a los núcleos reproductores (ver sección 3.7).

Proposición 3. *Si $f \in H^p$, $0 < p < \infty$, $|f(z)| \leq \|f\|_p (1 - |z|^2)^{-\frac{1}{p}}$.*

Obsérvese que el peso que aparece en la estimación es el mismo peso que consideramos en el problema (1). Esta proposición justifica de manera intuitiva el empleo de pesos al considerar la interpolación en H^p. Aunque, como ya dijimos, no es claro que $T^p_\Lambda H^p \subset \ell^p$, la proposición prueba que $T^p_\Lambda : H^p \to \ell^\infty$ es un operador acotado con $\|T^p_\Lambda\| \leq 1$.

Ahora ya podemos enunciar y probar el lema.

Lema 4. *Dado $1 \leq p \leq \infty$ y $\Lambda = \{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{D}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $T^p_\Lambda H^p \supset \ell^p$.

(b) Existe un $K > 0$ tal que si $c \in \ell^p$ con $\|c\|_p \leq 1$, existe $f \in H^p$ con $\|f\|_p \leq K$ y $T^p_\Lambda f = c$.

(c) Existe un $K > 0$ tal que para cada $N \in \mathbb{N}$, si $c = \{c_n\} \in \ell^p$ con $\|c\|_p \leq 1$, existe $f \in H^p$ con $\|f\|_p \leq K$ y $(1 - |z_n|^2)^{\frac{1}{p}} f(z_n) = c_n$ para $n = 1, \ldots, N$.

Demostración. Obviamente (b) implica (c). Veamos primero que (c) implica (a). Sea $w \in \ell^p$ y $c = w/\|w\|_p$. Entonces, existen $f_N \in H^p$ con $\|f_N\|_p \leq K$ y $(1 - |z_n|^2)^{\frac{1}{p}} f(z_n) = c_n$ para $n = 1, \ldots, N$. Por la proposición 3, $\|f_N\|_p \leq K$ implica que $\{f_N\}$ es uniformemente acotada en compactos. Por tanto, tiene una subsucesión que converge uniformemente en compactos a $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Se sigue que $f \in H^p$ y $T^p_\Lambda f = c$. Poniendo $g = \|w\|_p f$, se tiene $T^p_\Lambda g = w$.

Para ver que (a) implica (b), consideramos para $L = 1, 2, \ldots$

$$S_L = \{T^p_\Lambda f : f \in H^p, \|f\|_p \leq L\} \cap \ell^p.$$

Entonces se tiene por hipótesis $\bigcup_{L=1}^{\infty} S_L = \ell^p$. Además, S_L es cerrado en ℓ^p, pues si $\{T_\Lambda^p f_k\} \subset S_L$ y $T_\Lambda^p f_k \to c$ en ℓ^p, entonces, como antes, una subsucesión f_{k_j} converge uniformemente en compactos a $f \in H^p$. Además $\|f\|_p \leq L$, pues $\|f_n\|_p \leq L$. Entonces, $T_\Lambda^p f = c$, y se tiene $c \in S_L$.

Por tanto, por el teorema de categoría de Baire, algún S_L contiene una bola de radio $\rho > 0$ y centro uno de sus puntos, digamos $T_\Lambda^p f_0$. Ahora, dado $c \in \ell^p$ con $\|c\|_p \leq 1$, ponemos $d = (\rho/2)c + T_\Lambda^p f_0$. Entonces $d \in S_L$ y existe $f \in H^p$ con $\|f\|_p \leq L$ y $T_\Lambda^p f = d$. Poniendo $g = 2(f - f_0)/\rho$, $\|g\|_p \leq 2L/\rho$ y se tiene $T_\Lambda^p g = c$. Por tanto, se tiene (b) con $K = 2L/\rho$. $\square$

Empleando este lema, es sencillo probar que la condición de Carleson es condición necesaria.

Proposición 5. *Dado $\Lambda = \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$, si se tiene $T_\Lambda^p H^p \supset \ell^p$ para algún $1 \leq p \leq \infty$, entonces se tiene la condición de Carleson.*

Demostración. Usando el lema, se tiene $K > 0$ tal que existe $f_k \in H^p$ con $\|f_k\|_p \leq K$ y $T_\Lambda^p f_k = e_k$, donde $e_k = \{\delta_{kn}\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$. f_k puede factorizarse como $f_k(z) = B_k(z) g_k(z)$, donde B_k es el producto de Blaschke formado por z_n, $n \neq k$, y $\|g_k\|_p = \|f_k\|_p$.

Empleando la proposición 3,

$$1 = (1 - |z_n|^2)^{\frac{1}{p}} |f_n(z_n)| = (1 - |z_n|^2)^{\frac{1}{p}} |B_n(z_n)||g_n(z_n)| \leq K|B_n(z_n)|.$$

Por tanto, $|B_n(z_n)| \geq K^{-1}$. Como ya se observó arriba, esto es simplemente la condición de Carleson con $\delta = K^{-1}$. $\square$

3.3. Condición suficiente

Ahora probaremos que si se tiene la condición de Carleson, la inclusión $T_\Lambda^p H^p \supset \ell^p$ puede ser reducida a comprobar la inclusión $T_\Lambda^q H^q \subset \ell^q$ para q el exponente dual. Esta segunda inclusión puede ser entendida como un resultado sobre embebimientos y será probada más adelante por diversos métodos.

Necesitaremos primero el siguiente lema, que es una aplicación sencilla del teorema del grafo cerrado.

Lema 6. *Dado $1 \leq p \leq \infty$, si se tiene $T_\Lambda^p H^p \subset \ell^p$, entonces existe $K > 0$ tal que si $f \in H^p$, $\|f\|_p \leq 1$, entonces $\|T_\Lambda^p f\|_p \leq K$.*

Demostración. Por el teorema del grafo cerrado, basta ver que el operador $T_\Lambda^p : H^p \to \ell^p$ es un operador cerrado. Esto es claro. Si $\{f_n\} \subset H^p$, $f_n \to f$ en H^p y $T_\Lambda^p f_n \to w = \{w_n\}$ en ℓ^p, entonces por la proposición 3, para cada z_k fijo, $f_n(z_k) \to f(z_k)$. Por otro lado, $(1 - |z_n|^2)^{\frac{1}{p}} f_n(z_k) \to w_n$. Por tanto se tiene $T_\Lambda^p f = w$. $\square$

Tras este lema, pasamos a probar el resultado principal de esta subsección.

Teorema 7. *Dados $\Lambda = \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ satisfaciendo la condición de Carleson, $1 \leq p \leq \infty$ y q el exponente dual, si se tiene $T_\Lambda^q H^q \subset \ell^q$, entonces se tiene $T_\Lambda^p H^p \supset \ell^p$.*

Demostración. Escribimos primero la prueba para el caso $1 < p < \infty$ y al final comentaremos las particularidades de los casos $p = 1, \infty$.

Usamos el lema 4. Sea $c = \{c_n\} \in \ell^p$, $\|c\| \le 1$ y $N \in \mathbb{N}$. Ponemos

$$B(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{z - z_k}{1 - \overline{z}_k z}.$$

Entonces, si $1 \le n \le N$,

$$B'(z_n) = \frac{\beta_n}{1 - |z_n|^2},$$

donde

$$\beta_n = \prod_{1 \le k \le N; k \ne n} \frac{z_n - z_k}{1 - \overline{z}_k z_n}.$$

La condición de Carleson implica $|\beta_n| \ge \delta$. Ponemos ahora $\gamma_n = (1 - |z_n|^2)^{-\frac{1}{p}} c_n$. Entonces,

$$f_0(z) = B(z) \sum_{n=1}^{N} \frac{\gamma_n}{B'(z_n)(z - z_n)} = B(z) \sum_{n=1}^{N} \frac{\gamma_n (1 - |z_n|^2)}{\beta_n (z - z_n)}$$

resuelve la interpolación finita $(1 - |z_n|^2)^{\frac{1}{p}} f_0(z_n) = c_n$, $1 \le n \le N$.

Ahora bien, si $g \in BH^p$, $f_0 - g$ también resuelve la misma interpolación finita. Por el lema 4, basta ver que existe $K > 0$ independiente de N y c tal que $\|f_0 - BH^p\|_p \le K$.

Empleando que $|B| = 1$ en casi todo punto de $\mathbb{T}$ y el hecho de que el dual de L^p/H^p es zH^q, podemos calcular esta norma como

$$\begin{aligned} \|f_0 - BH^p\|_p &= \|f_0/B - H^p\|_p \\ &= \sup \left\{ \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f_0(e^{it})}{B(e^{it})} f(e^{it}) e^{it} dt \right| : f \in H^q, \|f\|_q \le 1 \right\}. \end{aligned}$$

Ahora calculamos la integral de la derecha. Por la fórmula integral de Cauchy para H^q,

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f_0(e^{it})}{B(e^{it})} f(e^{it}) e^{it} dt \right| = \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{\gamma_n (1 - |z_n|^2)}{\beta_n} f(z_n) \right|.$$

Usando Hölder, el término de la derecha es

$$\begin{aligned} &\le \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{(1 - |z_n|^2)|\gamma_n|^p}{|\beta_n|^p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{N} (1 - |z_n|^2)|f(z_n)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\le \delta^{-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|^2)|f(z_n)|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \delta^{-1} \|T_\Lambda^q f\|_q, \end{aligned}$$

pues $(1 - |z_n|^2)|\gamma_n|^p = |c_n|^p$, $\|c\|_p \le 1$ y $|\beta_n| \ge \delta$.

Ahora basta aplicar el lema 6.

Esto concluye la prueba para $1 < p < \infty$. Si $p = 1$, entonces $q = \infty$ y $\|f_q\| \leq 1$ implica $|f(z_n)| \leq 1$. Por tanto, estimamos directamente

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{\gamma_n (1 - |z_n|^2)}{\beta_n} f(z_n) \right| \leq \delta^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|^2) < \infty,$$

pues la condición de Carleson implica la condición de Blaschke. Obsérvese que en este caso la inclusión $T_\Lambda^q H^q \subset \ell^q$ es trivial.

Si $p = \infty$, hay que modificar el argumento de dualidad empleando $\|f_0/B - H^\infty\|_\infty \leq \|f_0/B - \mathcal{A}\|_\infty$ junto con el hecho de que el dual de $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ es zH^1 (obsérvese que $f_0/B \in \mathcal{C}$, pues hemos realizado interpolación finita). Una vez hecho esto, se estima directamente

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{\gamma_n (1 - |z_n|^2)}{\beta_n} f(z_n) \right| \leq \delta^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|^2)|f(z_n)| = \delta^{-1} \|T_\Lambda^1 f\|_1.$$

Esto concluye la prueba. □

3.4. El embebimiento $T_\Lambda^p H^p \subset \ell^p$

Como ya hemos visto en la proposición 7, probar que la condición de Carleson es suficiente para tener $T_\Lambda^p H^p = \ell^p$ para todo $1 \leq p \leq \infty$ se reduce a comprobar que $T_\Lambda^p H^p \subset \ell^p$ para todo $1 \leq p < \infty$ (el caso $p = \infty$ es obvio).

La primera observación que realizamos es que basta probar esta inclusión para un p_0 particular. Para ello, consideraremos un problema algo más general. Si ν es una medida de Borel en $\mathbb{D}$, entonces $H^p \subset L^p(\nu)$ y la inclusión es continua si y solo si existe $K > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p d\nu(z) \leq K, \quad f \in H^p, \ \|f\|_p \leq 1.$$

En este caso, se puede ver H^p como un subespacio cerrado de $L^p(\nu)$. Por tanto, esta inclusión se suele denominar *embebimiento*. Conviene observar que esta caracterización de la continuidad de la inclusión es cierta incluso para $p < 1$.

Poniendo

$$d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|^2) d\delta_{z_n}, \tag{2}$$

donde δ_z es la delta de Dirac centrada en z, se sigue del lema 6 que la inclusión $T_\Lambda^p H^p \subset \ell^p$ es equivalente a la inclusión continua $H^p \subset L^p(\nu)$.

Conviene comentar que existe un análogo del lema 6 para la inclusión $H^p \subset L^p(\nu)$: en caso de que se dé dicha inclusión, automáticamente es continua. Para $1 \leq p$, la prueba vuelve a consistir en comprobar que el operador de inclusión es cerrado. En este caso, la clave está en que la convergencia en $L^p(\nu)$ implica convergencia ν-en casi todo punto de una subsucesión. En el caso $p < 1$ no puede aplicarse el teorema del grafo cerrado, pero uno puede simplemente reducir este caso al caso $1 \leq p$ similarmente a como hacemos en la prueba del lema de abajo.

Por último, comentar que en el caso $p = \infty$ la inclusión continua es siempre trivial. Si $f \in H^\infty$ entonces $|f(z)| \leq \|f\|_\infty$ para todo $z \in \mathbb{D}$, y por tanto $|f(z)| \leq \|f\|_\infty$ ν-en casi todo punto. De esta forma, $f \in L^\infty(\nu)$ y $\|f\|_{L^\infty(\nu)} \leq \|f\|_{H^\infty}$.

Dicho esto, podemos pasar al lema que mencionábamos antes. La prueba es una aplicación del truco de factorización.

Lema 8. *Sea ν una medida de Borel en $\mathbb{D}$. Las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

(a) La inclusión $H^p \subset L^p(\nu)$ es continua para todo $0 < p < \infty$.

(b) La inclusión $H^p \subset L^p(\nu)$ es continua para algún $0 < p < \infty$.

Demostración. (a) implica (b) es obvio. Para ver que (b) implica (a), supongamos que $H^p \subset L^p(\nu)$ continuamente para algún $0 < p < \infty$ fijo. Sea $0 < q < \infty$ y $f \in H^q$ con $\|f\|_q \leq 1$.

Escribimos $f(z) = B(z)h^{\frac{p}{q}}(z)$, con B producto de Blaschke, $h \in H^p$, $\|h\|_p^p = \|f\|_q^q$. Entonces, puesto que $|B(z)| < 1$ para $z \in \mathbb{D}$,

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^q d\nu(z) \leq \int_{\mathbb{D}} |h(z)|^p d\nu(z) \leq K. \qquad \square$$

A la vista del lema, lo único que queda por probar es que para la medida ν definida en (2) se tiene la inclusión continua para cierto $0 < p < \infty$, esto es, $T_\Lambda^p H^p \subset \ell^p$. Esta prueba puede realizarse de varias maneras distintas. En el resto de esta sección presentaremos tres demostraciones, cada una en distinto grado de detalle. Es interesante tener en cuenta las tres demostraciones porque cada una de ellas ilustra algo distinto.

Primero veremos la prueba de Shapiro-Shields, cuya idea es que en el caso $p = 2$ uno puede ir deshaciendo los pasos de la prueba del teorema 7 y probar que si $T_\Lambda^2 H^2 \supset \ell^2$, entonces se tiene $T_\Lambda^2 H^2 \subset \ell^2$. La primera inclusión corresponde a resolver el problema de interpolación con pesos (1). En H^2 uno puede aprovechar la estructura de espacio de Hilbert para escribir una solución explícita.

La segunda prueba empleará un teorema de Carleson que caracteriza geométricamente las medidas ν para las cuales la inclusión $H^1 \subset L^1(\nu)$ es continua (aunque a la vista del lema 8, la caracterización será válida para cualquier $0 < p < \infty$).

Por último, la tercera prueba, debida a Vinogradov, usa una caracterización de la inclusión continua para $p = 2$ en función de los núcleos reproductores en H^2.

3.5. Prueba de Shapiro-Shields

Como ya hemos dicho, la idea de Shapiro-Shields es dar la vuelta al teorema 7 en el caso $p = 2$ y luego resolver explícitamente el problema de interpolación con pesos en H^2.

Proposición 9. *Dada $\Lambda = \{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{D}$ si $T_\Lambda^2 H^2 \supset \ell^2$, entonces $T_\Lambda^2 H^2 \subset \ell^2$.*

Demostración. Observando el comienzo de la prueba del teorema 7, se concluye que si $T_\Lambda^2 H^2 \supset \ell^2$, se ha de tener

$$\|f_0 - BH^2\|_2 = \sup_{f \in H^2,\ \|f\|_2 \leq 1} \left| \sum_{n=1}^N \frac{c_n(1-|z_n|^2)^{\frac{1}{2}}}{\beta_n} f(z_n) \right| \leq K,$$

para cada $N \in \mathbb{N}$ y $c = \{c_n\} \in \ell^2$ con $\|c\|_2 \leq 1$, con K independiente de N y c.

Por tanto, haciendo $N \to \infty$,

$$K \geq \sup_{\|f\|_2 \leq 1,\ \|c\|_2 \leq 1} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n (1-|z_n|^2)^{\frac{1}{2}}}{\beta_n} f(z_n) \right|.$$

Por dualidad en ℓ^2, el término de la derecha es

$$= \sup_{\|f\|_2 \leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-|z_n|^2)}{|\beta_n|^2} |f(z_n)|^2 \geq \sup_{\|f\|_2 \leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} (1-|z_n|^2)|f(z_n)|^2,$$

pues $|\beta_n| < 1$.

De esta forma, se obtiene, para $\|f\|_2 \leq 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-|z_n|^2)|f(z_n)|^2 \leq K,$$

lo cual es la inclusión $T_\Lambda^2 H^2 \subset \ell^2$. □

Comentario. En realidad, la prueba de esta proposición no usa nada especial del caso $p = 2$. De hecho, Shapiro y Shields prueban que $T_\Lambda^p H^p \supset \ell^p$ implica $T_\Lambda^q H^q \subset \ell^q$ para q el exponente dual, obteniendo así el recíproco del teorema 7. Nosotros solo hemos escrito el caso $p = 2$ porque es el único que necesitamos en nuestro plan para probar el teorema 2. El lector puede comprobar que para el caso general la prueba es esencialmente la misma.

Ahora, como hemos dicho, la interpolación con pesos (1), que corresponde a la inclusión $T_\Lambda^2 H^2 \supset \ell^2$, puede resolverse explícitamente. Para ello, primero necesitamos el siguiente lema computacional.

Lema 10. *Si $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ cumple la condición de Carleson, se tiene*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\overline{z}_j z_k|^2} \leq 1 - 2\log\delta,$$

para cada $k = 1, 2, \ldots$.

Demostración. Caculando,

$$\left| \frac{z_k - z_j}{1-\overline{z}_j z_k} \right|^2 = 1 - \frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\overline{z}_j z_k|^2}.$$

Ahora por la condición de Carleson,

$$\begin{aligned} 2\log\delta &\leq \log\left(\prod_{j\neq k} \left| \frac{z_k - z_j}{1-\overline{z}_j z_k} \right|^2 \right) = \sum_{j\neq k} \log\left(1 - \frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\overline{z}_j z_k|^2} \right) \\ &\leq -\sum_{j\neq k} \frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\overline{z}_j z_k|^2}, \end{aligned}$$

pues $\log(1-b) \leq -b$.

Por tanto,

$$\sum_{j\neq k} \frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\overline{z}_j z_k|^2} \leq -2\log\delta, \tag{3}$$

y se sigue el lema. □

La prueba de la interpolación en H^2 usará el siguiente resultado de Schur para formas cuadráticas [7].

Lema 11 (Schur). *Sean $a_{jk} \in \mathbb{C}$, $j,k = 1,2,\ldots$, tales que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{jk}| \le M, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| \le N.$$

Entonces, si $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, se tiene

$$\left| \sum_{j,k=1}^{\infty} a_{jk} x_j \overline{x}_k \right| \le (MN)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2.$$

Conviene comentar que este lema es un caso particular del teorema de Riesz-Thorin sobre interpolación de operadores. En este caso, la matriz (a_{jk}) induce un operador (no acotado a priori) $A : \ell^p \to \ell^p$. Las hipótesis son $\|A\|_{\ell^1 \to \ell^1} \le M$ y $\|A\|_{\ell^\infty \to \ell^\infty} \le N$, de lo cual se concluye que $\|A\|_{\ell^2 \to \ell^2} \le (MN)^{\frac{1}{2}}$.

Ahora ya podemos pasar a dar la prueba de la interpolación con pesos H^2. La demostración se reduce a calcular la norma del interpolador propuesto.

Proposición 12. *Dada $\Lambda = \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ satisfaciendo la condición de Carleson, se tiene $T_\Lambda^2 H^2 \supset \ell^2$.*

Demostración. Usamos el lema 4. Sean $N \in \mathbb{N}$ y $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$, $\|c\|_2 \le 1$ fijos. Ponemos similarmente al comienzo de la prueba del teorema 7

$$B(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{z - z_k}{1 - \overline{z}_k z},$$

$$g_k(z) = \left(\frac{B(z)}{z - z_k} \right)^2 (1 - |z_k|^2)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{B(z)}{B'(z_k)(z - z_k)} \right)^2 \beta_k^2 (1 - |z_k|)^{-\frac{1}{2}},$$

donde $\beta_k = B'(z_k)(1 - |z_k|^2)$ son como en la prueba del teorema 7.

Ahora ponemos

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{\beta_n^2} g_n(z).$$

Entonces se tiene $(1 - |z_n|^2)^{\frac{1}{2}} f(z_n) = c_n$. Además,

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle = \sum_{j,k=1}^{N} \frac{c_j \overline{c}_k}{(\beta_j \overline{\beta}_k)^2} \langle g_j, g_k \rangle.$$

Calculando, se obtiene

$$\langle g_j, g_k \rangle = (1 - |z_j|^2)^{\frac{3}{2}} (1 - |z_k|^2)^{\frac{3}{2}} \frac{1 + z_j \overline{z}_k}{(1 - z_j \overline{z}_k)^3}.$$

Sea $a_{jk} = \langle g_j, g_k \rangle$. Otro cálculo prueba que

$$(1 - |z_j|^2)^{\frac{1}{2}} (1 - |z_k|^2)^{\frac{1}{2}} \le |1 - z_j \overline{z}_k|.$$

Por tanto,

$$\sum_{j=1}^{N} |a_{jk}| \leq 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-z_j\overline{z}_k|^2} \leq 2(1-2\log\delta),$$

por el lema 10. Como $a_{jk} = \overline{a}_{kj}$, se tiene la misma cota para el sumatorio en k.

Usando ahora el lema 11 y $|\beta_k| \geq \delta$, se tiene

$$\|f\|_2^2 \leq \delta^{-4} 2(1-2\log\delta) \sum_{j=1}^{N} |c_j|^2 \leq \delta^{-4} 2(1-2\log\delta).$$

Por tanto, se tiene $T_\Lambda^2 H^2 \supset \ell^2$ por el lema 4. □

Juntando todo el material expuesto hasta ahora, podemos escribir finalmente la prueba del teorema 2, a modo de repaso de todos los resultados obtenidos.

Prueba del teorema 2. Si $T_\Lambda^p H^p = \ell^p$, por la proposición 5 se tiene que Λ cumple la condición de Carleson.

Recíprocamente, si Λ cumple la condición de Carleson, por la proposición 12, se tiene $T_\Lambda^2 H^2 \supset \ell^2$. Entonces, por la proposición 9 se tiene $T_\Lambda^2 H^2 \subset \ell^2$. Ahora, por el lema 8, se tiene también $T_\Lambda^p H^p \subset \ell^p$ para cualquier $1 \leq p \leq \infty$ (el caso $p = \infty$ es trivial). Por tanto, el teorema 7 implica que se tiene $T_\Lambda^p H^p \supset \ell^p$ para cualquier $1 \leq p \leq \infty$. De esta forma, $T_\Lambda^p H^p = \ell^p$. □

3.6. Medidas de Carleson

La prueba tradicional de teorema 1 pasa por estudiar las medidas ν para las que se tiene la inclusión continua $H^1 \subset L^1(\nu)$ (aunque en vista del lema 8 puede considerarse está inclusión para cualquier $0 < p < \infty$).

Definición. Una medida de Borel ν en $\mathbb{D}$ se dice *medida de Carleson* si la inclusión $H^1 \subset L^1(\nu)$ es continua.

El siguiente teorema debido a Carleson da una caracterización geométrica de las medidas de Carleson. Intuitivamente corresponde a que una medida es de Carleson si y solo si no crece demasiado en el borde del disco.

Teorema 13 (Carleson). *Dado $\zeta = e^{it} \in \mathbb{T}$, $h > 0$, sea*

$$Q_h(\zeta) = \{re^{i\theta} \in \mathbb{D} : 1 - r < h,\ t < \theta < t + h\}.$$

Si ν es una medida de Borel en $\mathbb{D}$, las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) ν es de Carleson.

(b) $\nu(Q_h(\zeta)) \leq Ch$ para cada $h > 0$ y $\zeta \in \mathbb{T}$, con C independiente de h y ζ.

Comentario. $Q_h(\zeta)$ es simplemente un "rectángulo" curvilíneo con un vértice en ζ, un lado sobre $\mathbb{T}$, dos lados sobre ciertos radios y otro lado sobre una circunferencia menor, concéntrica con $\mathbb{T}$.

Por tanto, basta comprobar que la medida ν definida en (2) cumple (b). Esto puede hacerse directamente, pero es mucho más sencillo realizar los cálculos si el problema se lleva a $\mathbb{H}$ mediante transformación conforme.

La equivalencia entre los espacios $H^p(\mathbb{D})$ y $H^p(\mathbb{H})$ es la siguiente (dado que no hemos presentado los espacios $H^p(\mathbb{H})$, si el lector quiere, puede de hecho tomar esta equivalencia como la definición de $H^p(\mathbb{H})$). Poniendo

$$f\left(\frac{i-w}{i+w}\right) = F(w),$$

se tiene $f(z) \in H^p(\mathbb{D})$ si y solo si $F(w)(w+i)^{-\frac{2}{p}} \in H^p(\mathbb{H})$. Además, $\|f(z)\|_{H^p(\mathbb{D})} = \|F(w)(w+i)^{-\frac{2}{p}}\|_{H^p(\mathbb{H})}$. Por tanto, la transformación conforme a emplear es

$$z = \frac{i-w}{i+w}, \quad w = i\frac{1-z}{1+z}, \quad z \in \mathbb{D},\ w \in \mathbb{H}.$$

Calculando, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|^2)|f(z_n)| = 4\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} w_n |F(w_n)(w_n+i)^{-2}|,$$

donde $w_n \in \mathbb{H}$ es la imagen de z_n por la transformación conforme.

Por tanto, poniendo

$$d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} w_n d\delta_{w_n}, \tag{4}$$

se tiene que $H^1(\mathbb{D}) \subset L^1(\nu)$ continuamente si y solo si $H^1(\mathbb{H}) \subset L^1(\mu)$ continuamente.

Ahora enunciamos los análogos para $\mathbb{H}$ de la definición y el teorema anterior.

Definición. Una medida de Borel μ en $\mathbb{H}$ se dice *medida de Carleson* si la inclusión $H^1(\mathbb{H}) \subset L^1(\mu)$ es continua.

Teorema 14 (Carleson)**.** *Dado $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$, sea*

$$Q_h(x) = (x, x+h) \times (0, h).$$

Si μ es una medida de Borel en $\mathbb{H}$, las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) μ es de Carleson.

(b) $\mu(Q_h(x)) \leq Ch$ para cada $h > 0$ y $x \in \mathbb{R}$, con C independiente de h y x.

Para la prueba del teorema, referimos al lector al libro de Koosis [3, capítulo VIII.F]. Allí la prueba se hace para el semiplano $\mathbb{H}$ y después se enuncian los resultados análogos para $\mathbb{D}$, ya que proceder así resulta más sencillo. La prueba emplea ciertos resultados sobre la función maximal no tangencial, los cuales también son más fáciles de enunciar y probar en $\mathbb{H}$.

Para comprobar que la medida μ definida en (4) satisface la condición (b) del teorema, necesitamos primero el siguiente lema computacional.

Diremos que $\{w_n\}$ cumple la condición de Carleson para $\mathbb{H}$ si y solo si la sucesión $\{z_n\}$ correspondiente cumple la condición de Carleson para $\mathbb{D}$. La desigualdad análoga a (C) puede obtenerse mediante transformación conforme.

Lema 15. *Si* $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{H}$ *cumple la condición de Carleson, se tiene*

$$\sum_{k\neq n} \frac{\operatorname{Im} w_n \operatorname{Im} w_k}{|w_n - \overline{w}_k|} \leq -\frac{1}{2}\log\delta,$$

para cada $n = 1, 2, \ldots$.

Demostración. Esta desigualdad se obtiene por transformación conforme de la ecuación (3) en la prueba del lema 10. □

Con esto, ya podemos probar que μ es una medida de Carleson. La prueba está basada en la de Koosis [3, capítulo IX].

Proposición 16. *Si* $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$*, la medida* μ *definida en* (4) *es de Carleson.*

Demostración. Vamos a probar que de hecho

$$\mu([x, x+h] \times (0, h]) \leq (1 - 5\log\delta)h.$$

Sean $x \in \mathbb{R}$ y $h > 0$ fijos, y sea $S = Q_h(x)$. Basta probar que

$$\sum_{w_n \in S, n \leq N} \operatorname{Im} w_n \leq (1 - 5\log\delta)h \tag{5}$$

para cada $N \in \mathbb{N}$. Fijemos un $N \in \mathbb{N}$.

Si no hay ningún $w_n \in S$, $n \leq N$, entonces la desigualdad (5) es cierta trivialmente. Si los hay y algún $w_n \in S$, $k \leq S$, tiene $\operatorname{Im} w_n \geq h/2$, veamos que la desigualdad (5) también es cierta.

Se tiene, si $w_k \in S$,

$$\frac{\operatorname{Im} w_n}{|w_n - \overline{w}_k|^2} \geq \frac{1}{10h},$$

pues $|w_n - \overline{w}_k|^2 = (\operatorname{Re} w_n - \operatorname{Re} w_k)^2 + (\operatorname{Im} w_n + \operatorname{Im} w_k)^2 \leq 5h^2$, e $\operatorname{Im} w_n \geq h/2$.

Por tanto, usando el lema 15,

$$-\frac{1}{2}\log\delta \geq \sum_{w_k \in S,\ k\neq n} \frac{\operatorname{Im} w_n \operatorname{Im} w_k}{|w_n - \overline{w}_k|} \geq \frac{1}{10h} \sum_{w_k \in S, k\neq n} \operatorname{Im} w_k,$$

y se tiene la desigualdad (5) usando $\operatorname{Im} w_n \leq h$.

En caso de que no hubiera ningún $w_k \in S$, $n \leq N$ con $\operatorname{Im} w_n \geq h/2$, entonces consideramos los cuadrados

$$S_1 = [x, x + h/2] \times (0, h/2], \quad S_2 = [x + h/2, x + h] \times (0, h/2].$$

Denotando

$$\Sigma(A) = \sum_{w_k \in A, k \leq N} \operatorname{Im} w_k,$$

se tiene $\Sigma(S) \leq \Sigma(S_1) + \Sigma(S_2)$ (obsérvese que S_1 y S_2 no son disjuntos y por tanto en general no hay igualdad). Basta probar entonces que

$$\Sigma(S_j) \leq (1 - 5\log\delta)\frac{h}{2}, \quad j = 1, 2.$$

Ahora aplicamos el razonamiento anterior a los nuevos cuadrados S_1 y S_2, dividiendo otra vez cada uno de ellos si resulta necesario. Como estamos mirando un número finito de puntos w_k, este proceso ha de parar eventualmente, quedando probada así la desigualdad correspondiente a (5) para cada uno de los cuadrados que se han ido obteniendo. Volviendo hacia atrás, se tiene la desigualdad (5) para S. □

3.7. Prueba de Vinogradov

La última prueba del embebimiento $T_\Lambda^p H^p \subset \ell^p$ emplea un teorema debido a Vinogradov que caracteriza la inclusión continua $H^2 \subset L^2(\nu)$ en función de los núcleos reproductores en H^2.

Definimos, para $\lambda \in \mathbb{D}$ el *núcleo reproductor en* λ,

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \overline{\lambda} z}.$$

Se tiene $k_\lambda \in H^2$, $\|k_\lambda\|_2 = (1 - |\lambda|^2)^{-\frac{1}{2}}$. Además, si $f \in H^2$,

$$f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle.$$

El término núcleo reproductor es debido a esta propiedad.

Definimos también, para $f \in L^2(\mathbb{T})$, la continuación armónica de f,

$$\mathcal{H}f = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt.$$

Por último, recordamos que si μ es una medida en un espacio topológico X, un punto $x \in X$, se dice del soporte de μ, $x \in \operatorname{supp} \mu$, si todo entorno abierto U de x tiene $\mu(U) > 0$.

Con esto, ya podemos enunciar el teorema. Solo daremos una idea de la prueba. Para los detalles, referimos al lector al libro de Nikol'skiĭ [6, lección VII].

Teorema 17 (Vinogradov). *Sea ν una medida de Borel en $\mathbb{D}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\mathcal{H}L^2(\mathbb{T}) \subset L^2(\nu)$.

(b) $H^2 \subset L^2(\nu)$.

(c) $\sup \left\{ \frac{\|k_\lambda\|_{L^2(\nu)}}{\|k_\lambda\|_{H^2}}, \lambda \in \mathbb{D} \right\} = a < \infty$.

(d) $\sup \left\{ \frac{\|k_\lambda\|_{L^2(\nu)}}{\|k_\lambda\|_{H^2}}, \lambda \in \operatorname{supp} \nu \right\} = C < \infty$.

Además, $C \leq a \leq \|\mathcal{H}\| \leq 4\sqrt{2}C$.

Idea de la prueba. (a) implica (b) y (c) implica (d) son obvios. Para ver que (b) implica (c), como ya se comentó en la sección 3.4, se usa el teorema del grafo cerrado. La clave es que la convergencia en $L^2(\mathbb{T})$ implica convergencia puntual de las imágenes por $\mathcal{H}$, junto con el hecho de que convergencia en $L^2(\nu)$ implica convergencia puntual ν-en casi todo punto de una subsucesion. Por tanto, $a \leq \|\mathcal{H}\|$.

Solo falta ver que $\|\mathcal{H}\| \leq 4\sqrt{2}C$, lo cual es la parte costosa de la prueba. Para ello, se utiliza el test de Vinogradov-Seničkin, un test de acotación para ciertos operadores integrales. Mediante ciertas estimaciones sobre $\mathcal{H}^*$, el adjunto formal de $\mathcal{H}$, se termina probando que $\mathcal{H}^*$ de hecho es acotado y $\|\mathcal{H}^*\| \leq 4\sqrt{2}C$. $\square$

Es muy sencillo aplicar el teorema al caso particular de la medida ν definida en (2).

Proposición 18. *Si* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *cumple la condición de Carleson, la medida* ν *definida en* (2) *cumple* $H^2 \subset L^2(\nu)$.

Demostración. Basta probar la condición (d) del teorema anterior. Dado $z_n \in \operatorname{supp} \nu$,

$$\begin{aligned} \frac{\|k_{z_n}\|_{L^2(\nu)}^2}{\|k_{z_n}\|_{H^2}^2} &= (1-|z_n|^2) \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-\overline{z}_k z|^2} d\nu(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-|z_n|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\overline{z}_k z_n|^2} \\ &\leq 1 - 2\log\delta, \end{aligned}$$

por el lema 10. □

4. Aplicación a la teoría espectral de operadores

En esta sección mostramos una aplicación del teorema de interpolación de Shapiro-Shields a la teoría espectral de operadores. En esta aplicación, cierto problema relativo a comprobar si la familia de autovectores de un operador es equivalente a una base ortonormal es reducido al problema de interpolación con pesos en H^2.

El operador S de multiplicación por la variable independiente en H^2, $(Sf)(z) = zf(z)$, se denomina *operador desplazamiento*, pues su efecto sobre los coeficientes de Taylor de f es justamente $(a_0, a_1, \ldots) \mapsto (0, a_0, \ldots)$.

En el estudio de la teoría espectral no clásica de un operador contractivo en un espacio de Hilbert, surge el problema de estudiar como modelo funcional el operador $T = PS|K$, donde K es un espacio coinvariante de S (esto es, $K = H^2 \ominus L$, L subespacio S-invariante), y $P = P_K$ es la proyección ortogonal sobre K. Este operador T se denomina *compresión* del operador desplazamiento.

Una cuestión importante es si existe una transformación invertible que lleve la familia de autovectores de T en una base ortonormal. En caso de existir, se obtiene una cierta descomposición espectral para T.

Comenzamos primero con el estudio de los subespacios invariantes. El siguiente teorema debido a Beurling da una caracterización de los subespacios invariantes de S.

Definición. Una función $\varphi \in H^\infty$ se dice *función interna* si $|\varphi(\zeta)| = 1$ para casi todo $\zeta \in \mathbb{T}$.

Obsérvese que los productos de Blaschke son un ejemplo particular de funciones internas.

Teorema 19 (Beurling)**.** *Cualquier subespacio invariante de* S *distinto del* $\{0\}$ *es de la forma* φH^2 *para alguna función interna* φ.

Referimos al lector al libro de Martínez-Avendaño y Rosenthal [4, capítulo 2.2] para una introducción elemental a la teoría de subespacios invariantes de S. Conviene observar que el recíproco de este teorema es obvio: si φ es una función interna, φH^2 es S-invariante. Además puede probarse que si φ, ψ son internas y $\varphi H^2 = \psi H^2$, entonces $\varphi = \psi$. De esta forma, el teorema de Beurling establece una biyección entre los subespacios invariantes de S y las funciones internas.

Ahora introduciremos el concepto de una base de Riesz y ciertos resultados relevantes. Este lenguaje resutará adecuado para el problema que estamos estudiando. El lector puede consultar el libro de Young [9] para una introducción sencilla o también el libro de Nikol'skiĭ [6, lección VI]. Daremos los resultados sin prueba.

Dado un conjunto de vectores $\{x_n\}$ en un espacio de Banach X, denotaremos como $\bigvee\{x_n\} = \overline{\operatorname{span}\{x_n\}}$ el mínimo subespacio cerrado que los contiene.

Definición. Una familia de vectores $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach X se dice *total* si $\bigvee\{x_n\} = X$.

Definición. Una familia de vectores $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach X se dice *minimal* o *topológicamente libre* si $x_n \notin \bigvee\{x_j : j \neq n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definición. Dada una familia de vectores $\mathcal{X} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach X, la familia de vectores $\mathcal{X}' = \{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el dual X^* se dice *biortogonal* si $\langle x_j, x'_k\rangle = \delta_{jk}$.

Es fácil ver usando el teorema de Hahn-Banach que $\mathcal{X}$ tiene una familia biortogonal $\mathcal{X}'$ si y solo si $\mathcal{X}$ es minimal. Además, $\mathcal{X}'$ es única si y solo si $\mathcal{X}$ es total.

Definición. Dado H un espacio de Hilbert, una familia de vectores $\mathcal{X} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ se dice *base de Riesz* si es total y existe un operador invertible V que lleva $\mathcal{X}$ en una familia ortonormal.

De esta forma, las bases de Riesz son bases equivalentes a una base ortonormal (en el sentido de estar relacionadas mediante un operador invertible). Por tanto, el problema que estamos tratando es comprobar si los autovectores de T forman una base de Riesz.

Si $\mathcal{X}$ es base de Riesz, $\mathcal{X}$ es total y minimal, y por tanto existe una única familia biortogonal $\mathcal{X}' = \{x'_n\} \subset X$. Además, $\mathcal{X}'$ es también base de Riesz.

Todo $x \in X$ admite la expansión en serie de Fourier

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x'_n\rangle x_n.$$

Denotaremos por $J_{\mathcal{X}}$ el operador que asigna a cada x sus coeficientes de Fourier, $J_{\mathcal{X}} x = \{\langle x, x'_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$.

La siguiente caracterización sobre las bases de Riesz es debida a Bari.

Teorema 20 (Bari)**.** *Sea $\mathcal{X}$ una familia minimal en un espacio de Hilbert H, $\mathcal{X}' \subset H$ una familia biortogonal. Son equivalentes*

(a) $\mathcal{X}$ es base de Riesz.

(b) $\mathcal{X}'$ es total y $J_{\mathcal{X}} H = \ell^2$.

(c) $\mathcal{X}$ es total y $J_{\mathcal{X}} H \subset \ell^2$, $J_{\mathcal{X}'} H \subset \ell^2$.

(d) $\mathcal{X}$ es total y la matrices de Gram $\Gamma_{\mathcal{X}}$ y $\Gamma_{\mathcal{X}'}$ definen operadores continuos en ℓ^2 (donde $\Gamma_{\mathcal{X}} = (\langle x_j, x_k\rangle)_{j,k=1}^{\infty}$).

(e) $\mathcal{X}'$ es total y $\Gamma_{\mathcal{X}}$ define un operador continuo e invertible en ℓ^2.

Por último, comentar que, aunque no lo necesitaremos, también es importante el siguiente teorema, debido a Köthe y Toeplitz.

Definición. Una familia de vectores $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach X se dice *base incondicional* si para cada $x \in X$ existen unos únicos escalares a_n tales que la serie $\sum a_n x_n$ converge a x incondicionalmente. Esto es, cualquier reordenación de esta serie converge a x.

Teorema 21 (Köthe-Toeplitz)**.** *Sea $\mathcal{X}$ una familia de vectores unitarios en un espacio de Hilbert H. Entonces $\mathcal{X}$ es base de Riesz si y solo si $\mathcal{X}$ es base incondicional.*

Ya podemos pasar al estudio del operador $T = PS|K$. Nos restringiremos al caso $K = H^2 \ominus BH^2$, donde B es un producto de Blaschke tal que todos sus ceros $\Lambda = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ son simples. Ponemos $B_n(z)$ el producto de Blaschke formado por los $\{z_k : k \neq n\}$. Entonces los autovalores de T y T^* son simples, y los autovectores correspondientes son

$$x_n = \frac{k_{z_n}}{\|k_{z_n}\|}\frac{B_n}{B_n(z_n)} = (1-|z_n|^2)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-\overline{z}_n z}\frac{B_n(z)}{B_n(z_n)},$$

$$x'_n = \frac{k_{z_n}}{\|k_{z_n}\|} = (1-|z_n|^2)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-\overline{z}_n z},$$

donde k_λ es el núcleo reproductor en λ (ver sección 3.7). Es fácil ver que los autovectores han sido normalizados convenientemente para que las familias $\mathcal{X} = \{x_n\}$ y $\mathcal{X}' = \{x'_n\}$ sean biortogonales.

La familia $\mathcal{X}'$ es total en K, pues si $f \in K$ y $\langle f, k_{z_n}\rangle = f(z_n) = 0$, entonces $f \in BH^2$ y se sigue $f = 0$. Por tanto, aplicando la condición (b) del teorema de Bari, se sigue que $\mathcal{X}$ es una base de Riesz en K si y solo si $J_{\mathcal{X}}K = \ell^2$.

Ahora, si $f \in H^2$,

$$J_{\mathcal{X}}f = \{\langle f, x'_n\rangle\}_{n=1}^{\infty} = \{(1-|z_n|^2)^{\frac{1}{2}} f(z_n)\}_{n=1}^{\infty} = T_\Lambda^2 f,$$

donde $T_\Lambda^2 f$ es la traza con pesos definida en la sección 3.1.

Observando que $J_{\mathcal{X}}$ se anula sobre BH^2, $J_{\mathcal{X}}K = J_{\mathcal{X}}H^2 = T_\Lambda^2 H^2$. Por tanto, los autovectores de T forman una base de Riesz si y solo si $T_\Lambda^2 H^2 = \ell^2$. El teorema de Shapiro-Shields muestra que esto ocurre si y solo si $\Lambda = \{z_n\}$ cumple la condición de Carleson.

5. La condición de Carleson

En la sección 3.1, enunciamos la condición de Carleson y comentamos que intuitivamente corresponde a pedir una cierta separación entre los puntos z_n. En esta sección mencionamos algunos resultados geométricos y condiciones auxiliares con el objetivo de entender mejor la condición de Carleson. Los resultados de esta sección pueden encontrarse en el libro de Nikol'skiĭ [6, lección VII.3].

A lo largo de esta sección, Λ será un conjunto infinito numerable de puntos en el disco. Recordamos que la condición de Carleson es

$$\prod_{\mu\in\Lambda;\ \lambda\neq\mu}\left|\frac{\lambda-\mu}{1-\bar{\lambda}\mu}\right| \geq \delta, \quad \lambda \in \Lambda. \tag{C}$$

Como ya comentamos, (C) implica la siguiente condición de separación

$$\left|\frac{\lambda-\mu}{1-\bar{\lambda}\mu}\right| \geq \delta, \quad \lambda,\mu \in \Lambda,\ \lambda \neq \mu. \tag{R}$$

Esta condición puede entenderse en términos de la distancia hiperbólica en $\mathbb{D}$. Pide que las distancias hiperbólicas entre pares de puntos estén acotadas inferiormente. Por tanto, puede expresarse también como que los discos hiperbólicos de un radio fijo y centros los puntos $\lambda \in \Lambda$ no se intersequen. Recordando la equivalencia entre las métricas euclídea e hiperbólica, también puede formularse empleando discos euclídeos de radio variable.

La condición $T_\Lambda^2 H^2 \subset \ell^2$, o cualquiera de las equivalentes mencionadas en la sección 3.4 y en el teorema 17, se denomina condición de Carleson-Newman. Podemos escribirla como

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}(1-|\lambda|^2)|f(\lambda)|^2 < K, \quad f \in H^2, \|f\|_2 \leq 1. \tag{CN}$$

Empleando los núcleos reproductores k_λ como funciones de test en (CN) y usando las desigualdades que aparecen en la prueba del lema 10, es sencillo probar que (CN) y (R) $\Rightarrow$ (C). Por otro lado, uno de los resultados principales de la sección 3 fue que (C) $\Rightarrow$ (CN). De esta forma, (C) es equivalente a (CN) y (R).

Decimos que Λ es un conjunto de Carleson si cumple (C). Entonces, tenemos el siguiente resultado. Solo damos una breve idea de la prueba.

Proposición 22. *Λ cumple* (CN) *si y solo si es una unión finita de conjuntos de Carleson.*

Idea de la prueba. La implicación $\Leftarrow$ es trivial. Para ver la implicación contraria, hay que dividir el disco en "rectángulos" de la siguiente forma. Se divide primero en anillos $R_n = \{1-2^{-n} \leq |z| \leq 1-2^{-n+1}\}$. Después, cada anillo R_n se divide en 2^n rectángulos Q_{nk} dividiendo el disco en 2^n sectores circulares iguales.

Ahora se aplica el teorema 13 a la medida ν definida en (2) para ver que en cada Q_{nk} no hay más de m puntos de Λ. Una vez hecho esto, es fácil partir Λ en un número finito de conjuntos Λ_j tales que cada Λ_j cumpla (R). □

El siguiente lema muestra que si los puntos tienden muy rápido al borde del disco (de forma exponencial), entonces siempre se tiene la condición de Carleson. Además, si los puntos están todos en un mismo radio, esta condición también es necesaria.

Lema 23 (Kabaĭla-Newman)**.** *Sea Λ un subconjunto numerable de $\mathbb{D}$ que se acumula solo en su frontera. Sea*

$$\gamma = \limsup_{\mu\in\Lambda, |\mu|\to 1} \left\{ \frac{1-|\lambda|}{1-|\mu|} : \lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}, |\lambda| \geq \mu \right\}$$

Si $\gamma < 1$ entonces Λ es de Carleson. Si $\Lambda \subset [0,1]$ es de Carleson, entonces $\gamma < 1$.

Si los puntos de Λ no tienden muy rápido al borde del disco, todavía pueden cumplir la condición de Carleson, siempre y cuando estén bien dispersos por todo el disco.

Por un lado, es fácil ver que (C) implica la condición de Blaschke. Por otro, el siguiente lema ilustra el hecho anterior, mostrando que si permitimos rotar los puntos de Λ libremente (manteniendo su módulo), entonces la condición de Blaschke es lo único necesario para tener (C).

Lema 24 (Naftalevič). *Si* $\Lambda = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *cumple la condición de Blaschke, existen* $\zeta_n \in \mathbb{T}$ *tales que* $\{\zeta_n z_n\}$ *cumple* (C).

6. Conclusiones

Hemos visto cómo el teorema de Shapiro-Shields formula la propiedad de interpolación libre en términos de una condición bastante sucinta, la condición de Carleson. Durante la prueba, hemos visto algunas cuestiones interesantes que repasaremos a continuación.

El lema 4 nos ha mostrado cómo podemos reformular un problema de interpolación infinita en función de una serie creciente de problemas de interpolación finitos. Esto luego es bastante útil. Por ejemplo, en la prueba del teorema 7, evitamos así tener que preocuparnos de la convergencia de la serie que define f_0. Además, esto es crítico en el caso $p = \infty$, pues allí usamos $f_0/B \in \mathcal{C}$, y luego acudimos al dual de $\mathcal{C}/\mathcal{A}$. Si hubieramos hecho una interpolación infinita, en general solo tendríamos $f_0/B \in L^\infty$. Esto es problemático, pues L^∞ no es separable y por tanto el dual de L^∞/H^∞ es gigantesco (contiene a zH^1 pero es mucho más grande).

También hemos podido ver lo útil que resulta el teorema del grafo cerrado. Este teorema permite obtener muy fácilmente un cierto control sobre las normas. Por ejemplo, obsérvese el enunciado del lema 6. Allí pasamos de conocer simplemente que la traza con pesos $T_\Lambda^p f$ es de ℓ^p a tener automáticamente un control sobre su norma en términos de la norma de f.

Otra cuestión interesante ha sido ver cómo al pasar de $\mathbb{D}$ a $\mathbb{H}$ algunos razonamientos se simplifican. Como ejemplo, invitamos al lector a que imagine o intente la prueba de la proposición 16 en $\mathbb{D}$. Por otro lado, otras veces razonar en $\mathbb{D}$ tiene sus ventajas. Por ejemplo, Koosis realiza la prueba de nuestro teorema 7 en $\mathbb{H}$, encontrando ciertas dificultades adicionales, pues la medida de $\mathbb{H}$ no es finita. Nosotros podemos proponer nuestro candidato a interpolador $f_0 \in H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D})$. Sin embargo, al realizar la prueba en $\mathbb{H}$, Koosis tiene que garantizar un cierto decaimiento en el infinito en su $f_0 \in H^p(\mathbb{H})$.

Finalmente, otro tema interesante que hemos visto ha sido el lenguaje de las medidas de Carleson y los embebimientos de H^p. Resaltar el terema de Carleson, teorema 13, con la caracterización geométrica de las medidas de Carleson, y el teorema de Vinogradov, teorema 17, con la caracterización en términos de los núcleos reproductores en H^2.

Por último, volver a comentar la importante aplicación de la variable compleja a la teoría de operadores, a través de operadores modelo actuando sobre espacios de funciones analíticas. Sin emplear el lenguaje y técnicas de la variable compleja, el problema de determinar si los autovectores del operador $T = PS|K$ de la sección 4 forman una base de Riesz resultaría sumamente difícil. De hecho, el problema de determinar si una familia de vectores es base de Riesz es en principio un problema numérico sobre series. Por tanto, la conexión de este problema con la interpolación mediante funciones analíticas es bastante sorprendente.

Referencias

[1] Lennart Carleson, *An interpolation problem for bounded analytic functions*, American Journal of Mathematics **80** (1958), no. 4, 921–930.

[2] Peter L. Duren, *Theory of H^p spaces*, Academic Press, 1970.

[3] Paul Koosis, *Introduction to H_p spaces*, second ed., Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 115, Cambridge University Press, 1992.

[4] Rubén A. Martínez-Avendaño and Peter Rosenthal, *An introduction to operators on the Hardy-Hilbert space*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 237, Springer, 2006.

[5] Rolf Nevanlinna, *Über beschränkte Funktionen die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen*, Annales Academie Scientarum Fennicae **13** (1919), no. 1.

[6] N. K. Nikol'skiĭ, *Treatise on the shift operator*, Grundlehren der mathematischen Wissenchaften, vol. 273, Springer-Verlag, 1986.

[7] I. Schur, *Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Verändlichen*, Journal Für die Reine un Angewandte Mathematik **140** (1911), 1–28.

[8] H. S. Shapiro and A. L. Shields, *On some interpolation problems for analytic functions*, American Journal of Mathematics **83** (1961), no. 3, 513–232.

[9] Robert M. Young, *An introduction to non-harmonic fourier series*, 2nd. ed., Academic Press, 1993.