Conjuntos K-espectrales y tuplas de operadores

Daniel Estévez

Universidad Autónoma de Madrid

31 de marzo de 2017

Estructura

1. Funciones test y conjuntos K-espectrales
   - Colecciones test
   - Subálgebras de funciones analíticas
   - Aplicación: operadores con el espectro en una curva

2. Estructuras separadas y tuplas de operadores
   - Antecedentes: vessels y operadores subnormales de tipo finito
   - Estructuras separadas
   - Compresión generalizada

Estructura

1. Funciones test y conjuntos K-espectrales
   - Colecciones test
   - Subálgebras de funciones analíticas
   - Aplicación: operadores con el espectro en una curva

2. Estructuras separadas y tuplas de operadores
   - Antecedentes: vessels y operadores subnormales de tipo finito
   - Estructuras separadas
   - Compresión generalizada

- Si T es una contracción ($\|T\| \leq 1$) en un espacio de Hilbert

$$\|p(T)\| \leq \sup_{|z|\leq 1} |p(z)|$$

para todo polinomio p (desigualdad de von Neumann).

- Si T es semejante a una contracción ($\|VTV^{-1}\| \leq 1$),

$$\|p(T)\| \leq K \sup_{|z|\leq 1} |p(z)|.$$

- Generalización a dominios distintos de $\overline{\mathbb{D}}$: $X \subset \mathbb{C}$ compacto, $\sigma(T) \subset X$. Entonces X es *K-espectral* para T si

$$\|f(T)\| \leq K \sup_{z\in X} |f(z)| \qquad (*)$$

para toda f racional sin polos en X.

- Si $(*)$ se cumple para toda f racional sin polos en X con valores matriciales $s \times s$, para todo $s \in \mathbb{N}$, y K independiente de s, entonces X se llama *completamente K-espectral*.
- $\overline{\mathbb{D}}$ es completamente K-espectral para T si y solo si T es semejante a una contracción.

Conjuntos K-espectrales

- Si T es una contracción ($\|T\| \leq 1$) en un espacio de Hilbert

$$\|p(T)\| \leq \sup_{|z|\leq 1} |p(z)|$$

para todo polinomio p (desigualdad de von Neumann).

- Si T es semejante a una contracción ($\|VTV^{-1}\| \leq 1$),

$$\|p(T)\| \leq K \sup_{|z|\leq 1} |p(z)|.$$

- Generalización a dominios distintos de $\overline{\mathbb{D}}$: $X \subset \mathbb{C}$ compacto, $\sigma(T) \subset X$. Entonces X es *K-espectral* para T si

$$\|f(T)\| \leq K \sup_{z\in X} |f(z)| \qquad (*)$$

para toda f racional sin polos en X.

- Si $(*)$ se cumple para toda f racional sin polos en X con valores matriciales $s \times s$, para todo $s \in \mathbb{N}$, y K independiente de s, entonces X se llama *completamente K-espectral*.
- $\overline{\mathbb{D}}$ es completamente K-espectral para T si y solo si T es semejante a una contracción.

Conjuntos K-espectrales

- Si T es una contracción ($\|T\| \leq 1$) en un espacio de Hilbert

$$\|p(T)\| \leq \sup_{|z|\leq 1} |p(z)|$$

para todo polinomio p (desigualdad de von Neumann).

- Si T es semejante a una contracción ($\|VTV^{-1}\| \leq 1$),

$$\|p(T)\| \leq K \sup_{|z|\leq 1} |p(z)|.$$

- Generalización a dominios distintos de $\overline{\mathbb{D}}$: $X \subset \mathbb{C}$ compacto, $\sigma(T) \subset X$. Entonces X es *K-espectral* para T si

$$\|f(T)\| \leq K \sup_{z\in X} |f(z)| \qquad (*)$$

para toda f racional sin polos en X.

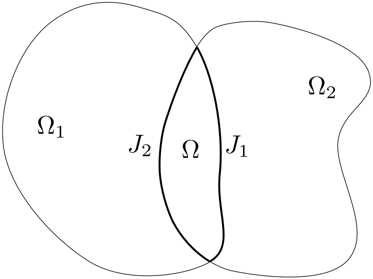
- Si $(*)$ se cumple para toda f racional sin polos en X con valores matriciales $s \times s$, para todo $s \in \mathbb{N}$, y K independiente de s, entonces X se llama *completamente K-espectral*.
- $\overline{\mathbb{D}}$ es completamente K-espectral para T si y solo si T es semejante a una contracción.

Funciones test: ejemplo sencillo

- $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ dominios de Jordan cuyas fronteras se intersecan transversalmente, $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$, $\varphi_j : \Omega_j \to \mathbb{D}$ aplicación de Riemann
- **Resultado:** Si $\|\varphi_j(T)\| \leq 1$, entonces $\overline{\Omega}$ es K-espectral para T, con K independiente de T
- **Prueba:** Si $f \in A(\overline{\Omega})$, entonces $f = f_1 + f_2$ con $f_j \in A(\overline{\Omega}_j)$ y $\|f_j\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$ (separación de singularidades de Havin-Nersessian) y

$$\|f(T)\| = \|(f_1 \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(T)) + (f_2 \circ \varphi_2^{-1})(\varphi_2(T))\| \leq \|f_1 \circ \varphi_1^{-1}\|_\infty + \|f_2 \circ \varphi_2^{-1}\|_\infty \leq K\|f\|_\infty$$

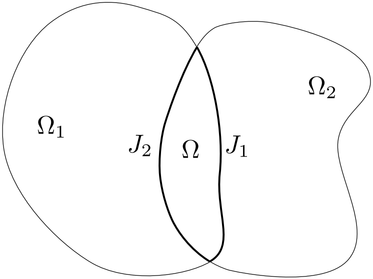
- Intentar extender este resultado a una situación más general (φ_j no univalentes)



- $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ dominios de Jordan cuyas fronteras se intersecan transversalmente, $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$, $\varphi_j : \Omega_j \to \mathbb{D}$ aplicación de Riemann
- **Resultado:** Si $\|\varphi_j(T)\| \leq 1$, entonces $\overline{\Omega}$ es K-espectral para T, con K independiente de T
- **Prueba:** Si $f \in A(\overline{\Omega})$, entonces $f = f_1 + f_2$ con $f_j \in A(\overline{\Omega}_j)$ y $\|f_j\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$ (separación de singularidades de Havin-Nersessian) y

$$\|f(T)\| = \|(f_1 \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(T)) + (f_2 \circ \varphi_2^{-1})(\varphi_2(T))\| \leq \|f_1 \circ \varphi_1^{-1}\|_\infty + \|f_2 \circ \varphi_2^{-1}\|_\infty \leq K\|f\|_\infty$$

- Intentar extender este resultado a una situación más general (φ_j no univalentes)



Definición

Sea $X \subset \widehat{\mathbb{C}}$ y Φ una colección de funciones de X en $\overline{\mathbb{D}}$ analíticas en un entorno de X. Decimos que Φ es una *colección test* para X si siempre que $\sigma(T) \subset X$ y $\overline{\mathbb{D}}$ es completamente K-espectral para $\varphi(T)$ para todo $\varphi \in \Phi$, entonces X es completamente K'-espectral para T.

- Distintas variantes de este concepto dependiendo de si $K = 1$ (es decir $\|\varphi(T)\| \leq 1$) o $K > 1$, o de si K' puede depender de T o no.
- Consideramos los casos $X = \Omega$ y $X = \overline{\Omega}$, donde $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio finitamente conexo con frontera analítica a trozos. El caso $X = \overline{\Omega}$ (cuando $\sigma(T)$ toca $\partial\Omega$) es técnicamente mucho más difícil.

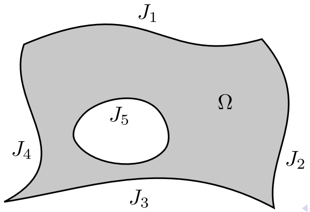
Resultados de la literatura en términos de colecciones test

- Sean $\Omega_1, \ldots, \Omega_n \subset \widehat{\mathbb{C}}$ dominios simplemente conexos con fronteras analíticas que no se intersecan y $\varphi_k : \overline{\Omega_k} \to \overline{\mathbb{D}}$ aplicaciones de Riemann. Entonces $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ es una colección test para $\overline{\bigcap \Omega_k}$. *(Douglas, Paulsen, 1986)*.
- Sean $D_1, \ldots, D_n$ discos en $\widehat{\mathbb{C}}$. y φ_k una transformación de Möbius que lleva D_k en $\mathbb{D}$. Entonces $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ es una colección test para $\overline{\bigcap D_k}$. *(Badea, Beckermann, Crouzeix, 2009)*.
- Sea X un compacto convexo. Escribimos $X = \bigcap H_\alpha$, con H_α semiplanos cerrados. Sea φ_α una transformación de Möbius que lleva H_α en $\overline{\mathbb{D}}$. Entonces $\{\varphi_\alpha\}$ es una colección test para X. *(Delyon, Delyon, 1999)*.
- Si B es un producto finito de Blaschke, el conjunto $\{B\}$ es una colección test para $\overline{\mathbb{D}}$. *(Mascioni, 1994)*.

Funciones y dominios admisibles

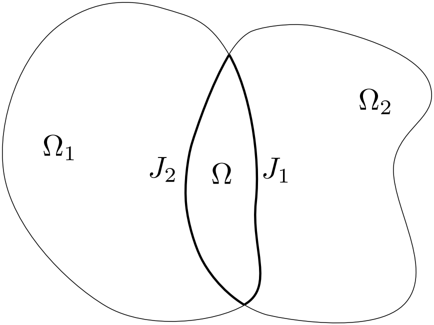
Definición

- $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio tal que $\partial\Omega$ es una unión finita disjunta de curvas de Jordan analíticas a trozos. Suponemos que los ángulos interiores de las “esquinas” de $\partial\Omega$ están en $(0, \pi]$.
- $\{J_k\}_{k=1}^n$ arcos analíticos cerrados que se intersecan a lo sumo en sus extremos y tales que $\partial\Omega = \bigcup J_k$.
- $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}^n$ analítica en un entorno de $\overline{\Omega}$ (puede debilitarse en muchos casos).
- $|\varphi_k| = 1$ en J_k.
- φ_k' no se anula en J_k.
- $\varphi_k(\zeta) \neq \varphi_k(z)$ si $\zeta \in J_k$, $z \in \overline{\Omega}$ y $z \neq \zeta$.



Ejemplo

$\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ dominios simplemente conexos con fronteras analíticas que se interesecan transversalmente.
$\Omega = \bigcap \Omega_k$, $J_k = \partial\Omega \cap \partial\Omega_k$.
$\varphi_k : \overline{\Omega_k} \to \overline{\mathbb{D}}$ aplicaciones de Riemann.

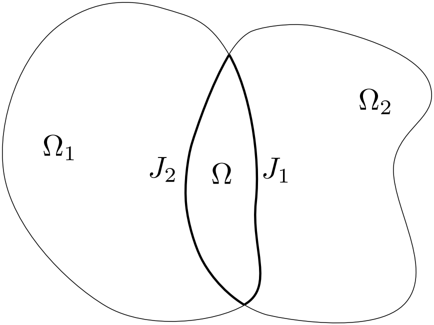


φ_k no tienen por qué ser univalentes en Ω en general.

Un ejemplo sencillo de función admisible

Ejemplo

$\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ dominios simplemente conexos con fronteras analíticas que se interesecan transversalmente.
$\Omega = \bigcap \Omega_k$, $J_k = \partial\Omega \cap \partial\Omega_k$.
$\varphi_k : \overline{\Omega_k} \to \overline{\mathbb{D}}$ aplicaciones de Riemann.



φ_k no tienen por qué ser univalentes en Ω en general.

Resultados principales sobre funciones admisibles

Teorema

Sea Ω simplemente conexo y $\Phi : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}^n$ admisible. Entonces Φ es una colección test para $\overline{\Omega}$ (con constante que depende de $\|T\|$). Si además Φ es inyectiva en $\overline{\Omega}$ y Φ' no se anula en Ω, entonces la constante es independiente de T.

Teorema

Sea Ω finitamente conexo y $\Phi : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}^n$ admisible. Entonces Φ es una colección test en Ω (con constante que depende del valor de $\|(T-\lambda)^{-1}\|$ en un número finito de puntos). Si además Φ es inyectiva en $\overline{\Omega}$ y Φ' no se anula en Ω, entonces la constante es independiente de T

En el primer teorema, se permite que $\sigma(T)$ interseque $\partial\Omega$ y en el segundo no. El caso en el que $\sigma(T)$ interseca $\partial\Omega$ es mucho más difícil técnicamente.

Resultados principales sobre funciones admisibles

Teorema

Sea Ω simplemente conexo y $\Phi : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}^n$ admisible. Entonces Φ es una colección test para $\overline{\Omega}$ (con constante que depende de $\|T\|$). Si además Φ es inyectiva en $\overline{\Omega}$ y Φ' no se anula en Ω, entonces la constante es independiente de T.

Teorema

Sea Ω finitamente conexo y $\Phi : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}^n$ admisible. Entonces Φ es una colección test en Ω (con constante que depende del valor de $\|(T-\lambda)^{-1}\|$ en un número finito de puntos). Si además Φ es inyectiva en $\overline{\Omega}$ y Φ' no se anula en Ω, entonces la constante es independiente de T

En el primer teorema, se permite que $\sigma(T)$ interseque $\partial\Omega$ y en el segundo no. El caso en el que $\sigma(T)$ interseca $\partial\Omega$ es mucho más difícil técnicamente.

- Son una clase más amplia que las funciones admisibles. Sustituimos la condición "$\varphi_k(\zeta) \neq \varphi_k(z)$ si $\zeta \in J_k$, $z \in \overline{\Omega}$ y $z \neq \zeta$" por una más débil.
- A partir de una colección débilmente admisible $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ producimos una colección admisible $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ poniendo

$$\varphi_k = (h_{1,k} \circ \psi_k) \cdots (h_{n,k} \circ \varphi_n),$$

con $h_{j,k} : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ y $h_{j,k} \in A(\overline{\mathbb{D}})$.

Teorema

Sea Ω finitamente conexo con frontera analítica y $\psi_1, \dots, \psi_n : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}$ internas ($|\psi_k| = 1$ en $\partial\Omega$). Si $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ es inyectiva en $\overline{\Omega}$, entonces Ψ es una colección test (con constante que depende del valor de $\|(T-\lambda)^{-1}\|$ en un número finito de puntos). Si además Ψ' no se anula en Ω, entonces la constante es independiente de T.

Funciones débilmente admisibles

- Son una clase más amplia que las funciones admisibles. Sustituimos la condición "$\varphi_k(\zeta) \neq \varphi_k(z)$ si $\zeta \in J_k$, $z \in \overline{\Omega}$ y $z \neq \zeta$" por una más débil.
- A partir de una colección débilmente admisible $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ producimos una colección admisible $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ poniendo

$$\varphi_k = (h_{1,k} \circ \psi_k) \cdots (h_{n,k} \circ \varphi_n),$$

con $h_{j,k} : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ y $h_{j,k} \in A(\overline{\mathbb{D}})$.

Teorema

Sea Ω finitamente conexo con frontera analítica y $\psi_1, \dots, \psi_n : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}$ internas ($|\psi_k| = 1$ en $\partial\Omega$). Si $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ es inyectiva en $\overline{\Omega}$, entonces Ψ es una colección test (con constante que depende del valor de $\|(T - \lambda)^{-1}\|$ en un número finito de puntos). Si además Ψ' no se anula en Ω, entonces la constante es independiente de T.

Si T es una contracción,

$$\|p(T)\| \leq \sup_{|z|\leq 1} |p(z)|$$

para todo polinomio p (desigualdad de von Neumann).
Si T_1, T_2 son contracciones que conmutan,

$$\|p(T_1, T_2)\| \leq \sup_{|z_j|\leq 1} |p(z_1, z_2)|$$

para todo polinomio p en dos variables (Ando).
Sin embargo, para tres o mas contracciones $T_1, \ldots, T_n$ que conmutan, en general es falso que

$$\|p(T_1, \ldots, T_n)\| \leq \sup_{|z_j|\leq 1} |p(z_1, \ldots, z_n)|.$$

Se desconoce si existe una constante C_n tal que

$$\|p(T_1, \ldots, T_n)\| \leq C_n \sup_{|z_j|\leq 1} |p(z_1, \ldots, z_n)|$$

para todo polinomio p y contracciones $T_1, \ldots, T_n$ que conmutan. Este problema abierto es importante en la teoría de varios operadores. Se cree que no existe tal constante C_n.
El álgebra de Agler de $\mathbb{D}^n$:

$$\|f\|_{\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)} = \sup_{\|T_j\|\leq 1,\ \sigma(T_j)\subset\mathbb{D}} \|f(T_1, \ldots, T_n)\|.$$

Si T es una contracción,

$$\|p(T)\| \leq \sup_{|z|\leq 1} |p(z)|$$

para todo polinomio p (desigualdad de von Neumann).
Si T_1, T_2 son contracciones que conmutan,

$$\|p(T_1, T_2)\| \leq \sup_{|z_j|\leq 1} |p(z_1, z_2)|$$

para todo polinomio p en dos variables (Ando).
Sin embargo, para tres o mas contracciones $T_1, \ldots, T_n$ que conmutan, en general es falso que

$$\|p(T_1, \ldots, T_n)\| \leq \sup_{|z_j|\leq 1} |p(z_1, \ldots, z_n)|.$$

Se desconoce si existe una constante C_n tal que

$$\|p(T_1, \ldots, T_n)\| \leq C_n \sup_{|z_j|\leq 1} |p(z_1, \ldots, z_n)|$$

para todo polinomio p y contracciones $T_1, \ldots, T_n$ que conmutan. Este problema abierto es importante en la teoría de varios operadores. Se cree que no existe tal constante C_n.
El álgebra de Agler de $\mathbb{D}^n$:

$$\|f\|_{\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)} = \sup_{\|T_j\|\leq 1,\ \sigma(T_j)\subset\mathbb{D}} \|f(T_1, \ldots, T_n)\|.$$

Productos de Blaschke y la desigualdad de von Neumann

Denotamos por $\mathscr{B}$ el conjunto de todas las tuplas $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ donde φ_k son productos finitos de Blaschke y Φ es inyectivo en $\overline{\mathbb{D}}$ y Φ' no se anula en $\mathbb{D}$.

Teorema

Si $n \geq 3$ y $p \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$,

$$\|p\|_{\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)} = \sup \|p(\varphi_1(T), \dots, \varphi_n(T))\|,$$

donde $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ recorre todas las tuplas de $\mathscr{B}$ y T recorre todas las matrices con $\sigma(T) \subset \mathbb{D}$ y tales que $\|\varphi_k(T)\| \leq 1$, $k = 1, \dots, n$.

Usamos un teorema de Agler, McCarthy y Young (2013) que dice que basta estudiar la desigualdad de von Neumann para contracciones que son matrices con todos los autovalores distintos (matrices genéricas) y el problema de Pick para construir los productos de Blaschke (resolviendo un problema cuyos datos han sido perturbados de forma adecuada).

Este teorema permite aplicar nuestros resultados sobre colecciones test al estudio de la desigualdad de von Neumann.

Otros resultados sobre conjuntos completamente K-espectrales

Teorema

Sean $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ dominios de Jordan con fronteras rectificables, Ahlfors regulares que se intersecan transversalmente Si $\overline{\Omega}_j$ es (completamente) K_j-espectral para T, entonces $\overline{\bigcap \Omega_j}$ es (completamente) K-espectral para T.

Este teorema generaliza un resultado de Badea, Beckermann, Crouzeix (2009) sobre intersección de discos en la esfera de Riemann.

Teorema

Sea Ω un dominio de Jordan C^2 a trozos y $R > 0$ tal que para cada $\lambda \in \Omega$ existe un $\mu(\lambda) \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ tal que $B(\mu, R)$ es tangente a $\partial\Omega$ en λ. Si $\|(T - \mu(\lambda)I)^{-1}\| \leq R^{-1}$ para todo $\lambda \in \partial\Omega$, entonces $\overline{\Omega}$ es completamente K-espectral para T.

Este teorema generaliza resultados de Delyon, Delyon (1999) y Putinar, Sandberg (2005) sobre conjuntos convexos que contienen el rango numérico de un operador. También puede verse como una generalización de ρ-contracciones.

Estructura

1. Funciones test y conjuntos K-espectrales
   - Colecciones test
   - Subálgebras de funciones analíticas
   - Aplicación: operadores con el espectro en una curva

2. Estructuras separadas y tuplas de operadores
   - Antecedentes: vessels y operadores subnormales de tipo finito
   - Estructuras separadas
   - Compresión generalizada

Separación de singularidades con la composición

- Para probar nuestros teoremas sobre conjuntos K-espectral bastaría con descomponer toda $f \in A(\overline{\Omega})$ como
$$f(z) = g_1(\varphi_1(z)) + \cdots g_n(\varphi_n(z)), \qquad g_k \in A(\overline{\mathbb{D}}). \tag{$*$}$$
- Si φ_k son univalentes en Ω_k, esto equivale a escribir
$$f(z) = f_1(z) + \cdots + f_n(z), \qquad f_k \in A(\overline{\Omega}_k).$$
- Esto es una separación de singularidades (Havin, Nersessian, Ortega-Cerdà).
- En el caso general, no es posible conseguir $(*)$.

Teorema

Si $\Phi : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}^n$ es admisible, existen operadores acotados $F_k : H^\infty(\Omega) \to H^\infty(\Omega)$ tales que el operador
$$f \mapsto f - \sum_{k=1}^{n} F_k(f) \circ \varphi_k$$
es compacto en $H^\infty(\Omega)$ y su rango está contenido en $A(\overline{\Omega})$. Además, F_k mandan $A(\overline{\Omega})$ en $A(\overline{\mathbb{D}})$.

Técnicas: modificación de los argumentos de Havin-Nersessian y operadores integrales débilmente singulares.

- Para probar nuestros teoremas sobre conjuntos K-espectral bastaría con descomponer toda $f \in A(\overline{\Omega})$ como

$$f(z) = g_1(\varphi_1(z)) + \cdots g_n(\varphi_n(z)), \qquad g_k \in A(\overline{\mathbb{D}}). \tag{$*$}$$

- Si φ_k son univalentes en Ω_k, esto equivale a escribir

$$f(z) = f_1(z) + \cdots + f_n(z), \qquad f_k \in A(\overline{\Omega}_k).$$

- Esto es una separación de singularidades (Havin, Nersessian, Ortega-Cerdà).
- En el caso general, no es posible conseguir $(*)$.

Teorema

Si $\Phi : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}^n$ es admisible, existen operadores acotados $F_k : H^\infty(\Omega) \to H^\infty(\Omega)$ tales que el operador

$$f \mapsto f - \sum_{k=1}^{n} F_k(f) \circ \varphi_k$$

es compacto en $H^\infty(\Omega)$ y su rango está contenido en $A(\overline{\Omega})$. Además, F_k mandan $A(\overline{\Omega})$ en $A(\overline{\mathbb{D}})$.

Técnicas: modificación de los argumentos de Havin-Nersessian y operadores integrales débilmente singulares.

Subálgebras $\mathcal{H}_\Phi$ y $\mathcal{A}_\Phi$

$$\mathcal{H}_\Phi = \left\{ \sum_{j=1}^{l} f_{j,1}(\varphi_1(z)) f_{j,2}(\varphi_2(z)) \cdots f_{j,n}(\varphi_n(z)) : \; l \in \mathbb{N}, \; f_{j,k} \in H^\infty(\mathbb{D}) \right\}$$

$$\mathcal{A}_\Phi = \left\{ \sum_{j=1}^{l} f_{j,1}(\varphi_1(z)) f_{j,2}(\varphi_2(z)) \cdots f_{j,n}(\varphi_n(z)) : \; l \in \mathbb{N}, \; f_{j,k} \in A(\overline{\mathbb{D}}) \right\}$$

Son subálgebras (no cerradas, a priori) de $H^\infty(\Omega)$ y $A(\overline{\Omega})$ respectivamente.

Preguntas:

- ¿Qué condiciones geométricas sobre Φ garantizan que $\mathcal{H}_\Phi = H^\infty(\Omega)$ y $\mathcal{A}_\Phi = A(\overline{\Omega})$?
- ¿Qué condiciones geométricas sobre Φ garantizan que $\mathcal{H}_\Phi$ y $\mathcal{A}_\Phi$ sean subálgebras cerradas (débil*-cerradas) de codimensión finita en $H^\infty(\Omega)$ y $A(\overline{\Omega})$ respectivamente?

Teorema

Si $\Phi : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}^n$ *es admisible, entonces* $\mathcal{H}_\Phi$ *es una subálgebra débil* -cerrada de codimensión finita en* $H^\infty(\Omega)$ *y* $\mathcal{A}_\Phi$ *es una subálgebra cerrada de codimensión finita en* $A(\overline{\Omega})$*. Si además,* Φ *es inyectiva en* $\overline{\Omega}$ *y* Φ' *no se anula en* Ω*, entonces* $\mathcal{H}_\Phi = H^\infty(\Omega)$ *y* $\mathcal{A}_\Phi = A(\overline{\Omega})$*.*

Observación: Es fácil ver que para que se den las igualdades es necesario que Φ sea inyectiva y Φ' no se anule.

Técnicas: Operadores compactos y técnicas de álgebras de Banach. Clasificación de subálgebras unitales cerradas de codimensión uno en un álgebra de Banach conmutativa y unital (Gorin, 1969).

Álgebras de funciones en curvas analíticas

$\mathcal{V} = \Phi(\Omega)$ es una curva analítica en el polidisco $\mathbb{D}^n$. Consideramos las álgebras $H^\infty(\mathcal{V})$ y $A(\overline{\mathcal{V}})$.
Si F está definida en $\mathcal{V}$, ponemos $\Phi^* F = F \circ \Phi$.

Teorema

Si Ω y Φ son admisibles, entonces $\Phi^* H^\infty(\mathcal{V}) = \mathcal{H}_\Phi$ y $\Phi^* A(\overline{\mathcal{V}}) = \mathcal{A}_\Phi$.

Recordatorio

El álgebra de Agler de $\mathbb{D}^n$:

$$\|f\|_{\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)} = \sup_{\substack{\|T_j\| \leq 1 \\ \sigma(T_j) \subset \mathbb{D}}} \|f(T_1, \dots, T_n)\|.$$

Para todo n, $\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n) \subset H^\infty(\mathbb{D}^n)$. Para $n = 1, 2$, hay igualdad (von Neumann, Ando), pero para $n \geq 3$, se cree que la inclusión es propia.

Teorema

Si Ω y Φ son admisibles, entonces toda $f \in H^\infty(\mathcal{V})$ puede extenderse a una $F \in \mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)$ con $F|_\mathcal{V} = f$ y $\|F\|_{\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)} \leq C\|f\|_{H^\infty(\mathcal{V})}$.

Álgebras de funciones en curvas analíticas

$\mathcal{V} = \Phi(\Omega)$ es una curva analítica en el polidisco $\mathbb{D}^n$. Consideramos las álgebras $H^\infty(\mathcal{V})$ y $A(\overline{\mathcal{V}})$.
Si F está definida en $\mathcal{V}$, ponemos $\Phi^* F = F \circ \Phi$.

Teorema

Si Ω y Φ son admisibles, entonces $\Phi^* H^\infty(\mathcal{V}) = \mathcal{H}_\Phi$ y $\Phi^* A(\overline{\mathcal{V}}) = \mathcal{A}_\Phi$.

Recordatorio

El álgebra de Agler de $\mathbb{D}^n$:

$$\|f\|_{\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)} = \sup_{\substack{\|T_j\| \le 1 \\ \sigma(T_j) \subset \mathbb{D}}} \|f(T_1, \dots, T_n)\|.$$

Para todo n, $\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n) \subset H^\infty(\mathbb{D}^n)$. Para $n = 1, 2$, hay igualdad (von Neumann, Ando), pero para $n \geq 3$, se cree que la inclusión es propia.

Teorema

Si Ω y Φ son admisibles, entonces toda $f \in H^\infty(\mathcal{V})$ puede extenderse a una $F \in \mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)$ con $F|_{\mathcal{V}} = f$ y $\|F\|_{\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)} \leq C\|f\|_{H^\infty(\mathcal{V})}$.

Estructura

1. Funciones test y conjuntos K-espectrales
   - Colecciones test
   - Subálgebras de funciones analíticas
   - Aplicación: operadores con el espectro en una curva

2. Estructuras separadas y tuplas de operadores
   - Antecedentes: vessels y operadores subnormales de tipo finito
   - Estructuras separadas
   - Compresión generalizada

- T un operador con $\sigma(T) \subset \Gamma$, donde Γ es una curva suave sin auto-intersecciones.
- Se tiene $\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq \operatorname{dist}(\lambda, \Gamma)^{-1}$ para λ en un entorno de Γ si y solo si T es normal (Stampfli, 1965).
- Si T es semejante a normal (VTV^{-1} es normal), se tiene $\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq C \operatorname{dist}(\lambda, \Gamma)^{-1}$. El recíproco es falso: Benamara-Nikolski (1999), Nikolski-Treil (2002).

Teorema

Si Ω es un domino de Jordan $C^{1+\alpha}$, $\Gamma = \partial\Omega$, U es un entorno de Γ y

$$\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq \operatorname{dist}(\lambda, \Gamma)^{-1}, \qquad \lambda \in U \setminus \overline{\Omega},$$
$$\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq C \operatorname{dist}(\lambda, \Gamma)^{-1}, \qquad \lambda \in \Omega,$$

entonces T es semejante a normal.

Las dos condiciones de crecimiento pueden intercambiarse.
En la prueba de este teorema usamos nuestra generalización del teorema de Delyon-Delyon sobre convexos que contienen el rango numérico para probar que $\overline{\Omega}$ es K-espectral para T.

- T un operador con $\sigma(T) \subset \Gamma$, donde Γ es una curva suave sin auto-intersecciones.
- Se tiene $\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq \operatorname{dist}(\lambda,\Gamma)^{-1}$ para λ en un entorno de Γ si y solo si T es normal (Stampfli, 1965).
- Si T es semejante a normal (VTV^{-1} es normal), se tiene $\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq C \operatorname{dist}(\lambda,\Gamma)^{-1}$. El recíproco es falso: Benamara-Nikolski (1999), Nikolski-Treil (2002).

Teorema

Si Ω es un domino de Jordan $C^{1+\alpha}$, $\Gamma = \partial\Omega$, U es un entorno de Γ y

$$\begin{aligned} \|(T-\lambda)^{-1}\| &\leq \operatorname{dist}(\lambda,\Gamma)^{-1}, \qquad && \lambda \in U \setminus \overline{\Omega}, \\ \|(T-\lambda)^{-1}\| &\leq C \operatorname{dist}(\lambda,\Gamma)^{-1}, \qquad && \lambda \in \Omega, \end{aligned}$$

entonces T es semejante a normal.

Las dos condiciones de crecimiento pueden intercambiarse.

En la prueba de este teorema usamos nuestra generalización del teorema de Delyon-Delyon sobre convexos que contienen el rango numérico para probar que $\overline{\Omega}$ es K-espectral para T.

Estimaciones de la resolvente y semejanza a normal

- T un operador con $\sigma(T) \subset \Gamma$, donde Γ es una curva suave sin auto-intersecciones.
- Se tiene $\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq \operatorname{dist}(\lambda,\Gamma)^{-1}$ para λ en un entorno de Γ si y solo si T es normal (Stampfli, 1965).
- Si T es semejante a normal (VTV^{-1} es normal), se tiene $\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq C \operatorname{dist}(\lambda,\Gamma)^{-1}$. El recíproco es falso: Benamara-Nikolski (1999), Nikolski-Treil (2002).

Teorema

Si Ω es un domino de Jordan $C^{1+\alpha}$, $\Gamma = \partial\Omega$, U es un entorno de Γ y

$$\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq \operatorname{dist}(\lambda,\Gamma)^{-1}, \qquad \lambda \in U \setminus \overline{\Omega},$$
$$\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq C \operatorname{dist}(\lambda,\Gamma)^{-1}, \qquad \lambda \in \Omega,$$

entonces T es semejante a normal.

Las dos condiciones de crecimiento pueden intercambiarse.
En la prueba de este teorema usamos nuestra generalización del teorema de Delyon-Delyon sobre convexos que contienen el rango numérico para probar que $\overline{\Omega}$ es K-espectral para T.

Teoremas de Naboko y van Casteren

Teorema (Naboko, 1984)

Supongamos que $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$. *Si*

$$\int_0^{2\pi} \|(T - re^{it})^{-1}x\|^2\,dt \leq C\|x\|^2(r-1)^{-1}, \qquad r > 1,$$

$$\int_0^{2\pi} \|(T^* - re^{it})^{-1}x\|^2\,dt \leq C\|x\|^2(1-r)^{-1}, \qquad 0 < r < 1,$$

entonces T *es semejante a unitario.*

Teorema (van Casteren, 1983)

Supongamos que $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$. *Si* $\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq \operatorname{dist}(\lambda, \mathbb{T})^{-1}$ *para* $\lambda \in \mathbb{D}$ *y*

$$\int_0^{2\pi} \|(T - re^{it})^{-1}x\|^2\,dt \leq C\|x\|^2(r-1)^{-1}, \qquad r > 1,$$

$$\int_0^{2\pi} \|(T^* - re^{it})^{-1}x\|^2\,dt \leq C\|x\|^2(r-1)^{-1}, \qquad r > 1,$$

entonces T *es semejante a unitario.*

Familias de curvas que tienden a Γ

- Ω un dominio de Jordan, $\Gamma = \partial\Omega$.
- $\{\gamma_s\}_{0<s<1}$ una familia de curvas de Jordan tiende a Γ si:
  1. $C^{-1}s \leq \operatorname{dist}(x, \Gamma) \leq Cs, \quad x \in \gamma_s$
  2. $\operatorname{long}(\gamma_s \cap B(x, r)) \leq Cr$
- Si $\gamma_s \subset \Omega$ ($\gamma_s \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$) para todo s, decimos que $\{\gamma_s\}$ tiende a Γ desde dentro (fuera).

Consideramos la condición

$$\int_{\gamma_s} \|(T-\lambda)^{-1}x\|^2 \, |d\lambda| \leq C\|x\|^2 s^{-1},$$

donde $\{\gamma_s\}_{0<s<1}$ tiende a Γ desde dentro/fuera. Esta condición no depende de la elección de $\{\gamma_s\}$.

Familias de curvas que tienden a Γ

- Ω un dominio de Jordan, $\Gamma = \partial\Omega$.
- $\{\gamma_s\}_{0<s<1}$ una familia de curvas de Jordan tiende a Γ si:
  1. $C^{-1}s \leq \operatorname{dist}(x, \Gamma) \leq Cs, \quad x \in \gamma_s$
  2. $\operatorname{long}(\gamma_s \cap B(x, r)) \leq Cr$
- Si $\gamma_s \subset \Omega$ ($\gamma_s \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$) para todo s, decimos que $\{\gamma_s\}$ tiende a Γ desde dentro (fuera).

Consideramos la condición

$$\int_{\gamma_s} \|(T-\lambda)^{-1}x\|^2 \, |d\lambda| \leq C\|x\|^2 s^{-1},$$

donde $\{\gamma_s\}_{0<s<1}$ tiende a Γ desde dentro/fuera. Esta condición no depende de la elección de $\{\gamma_s\}$.

- Ω un dominio de Jordan, $\Gamma = \partial\Omega$.
- $\{\gamma_s\}_{0<s<1}$ una familia de curvas de Jordan tiende a Γ si:
  1. $C^{-1}s \leq \mathrm{dist}(x, \Gamma) \leq Cs, \quad x \in \gamma_s$
  2. $\mathrm{long}(\gamma_s \cap B(x, r)) \leq Cr$
- Si $\gamma_s \subset \Omega$ ($\gamma_s \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$) para todo s, decimos que $\{\gamma_s\}$ tiende a Γ desde dentro (fuera).

Consideramos la condición

$$\int_{\gamma_s} \|(T - \lambda)^{-1} x\|^2 \, |d\lambda| \leq C\|x\|^2 s^{-1},$$

donde $\{\gamma_s\}_{0<s<1}$ tiende a Γ desde dentro/fuera. Esta condición no depende de la elección de $\{\gamma_s\}$.

Generalizaciones de Naboko y van Casteren

Sea Ω un dominio de Jordan $C^{1+\alpha}$, $\Gamma = \partial\Omega$, y T con $\sigma(T) \subset \Gamma$. Supongamos que $\{\gamma_s\}_{0<s<1}$ tienden a Γ desde fuera y $\{\widetilde{\gamma}_s\}_{0<s<1}$ tienden a Γ desde dentro.

Teorema (Generalización de Naboko)

Si

$$\int_{\gamma_s} \|(T-\lambda)^{-1}x\|^2\,|d\lambda| \le C\|x\|^2 s^{-1},$$

$$\int_{\widetilde{\gamma}_s} \|(T^*-\overline{\lambda})^{-1}x\|^2\,|d\lambda| \le C\|x\|^2 s^{-1},$$

entonces T es semejante a normal.

Teorema (Generalización de van Casteren)

Si $(T-\lambda)^{-1}\| \le C\,\mathrm{dist}(\lambda,\Gamma)^{-1}$ *para* $\lambda \in \Omega$ *y*

$$\int_{\gamma_s} \|(T-\lambda)^{-1}x\|^2\,|d\lambda| \le C\|x\|^2 s^{-1},$$

$$\int_{\gamma_s} \|(T^*-\overline{\lambda})^{-1}x\|^2\,|d\lambda| \le C\|x\|^2 s^{-1},$$

entonces T es semejante a normal.

Herramientas

Extensión pseudoanalítica: Si $f \in C^{1+\alpha}(\Gamma)$, existe $F \in C^1(\mathbb{C})$ tal que $F|\Gamma = f$ y $|\overline{\partial} F(z)| \leq C\|f\|_{C^{1+\alpha}} \operatorname{dist}(z,\Gamma)^\alpha$.

Cálculo de Dynkin: Si $\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq C \operatorname{dist}(\lambda,\Gamma)^{-1}$, entonces puede definirse $f(T)$ para $f \in C^{1+\alpha}(\Gamma)$ como

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} F(\lambda)(\lambda - T)^{-1}\,d\lambda - \frac{1}{\pi}\iint_D \overline{\partial} F(\lambda)(\lambda - T)^{-1}\,dA(\lambda),$$

donde F es una extensión pseudoanalítica de f y $D \supset \Gamma$.

Un difeomorfismo $C^{1+\alpha}$ adecuado $\eta : \Gamma \to \mathbb{T}$. Lo utilizamos para pasar de Γ y $\mathbb{T}$ y probar que $\eta(T)$ es semejante a unitario. Relacionamos las estimaciones de las resolventes de T y $\eta(T)$:

$$C^{-1}\|(T-\lambda)^{-1}x\| \leq \|(\eta(T)-\eta(\lambda))^{-1}x\| \leq C\|(T-\lambda)^{-1}x\|.$$

Estructura

1. Funciones test y conjuntos K-espectrales
   - Colecciones test
   - Subálgebras de funciones analíticas
   - Aplicación: operadores con el espectro en una curva
2. Estructuras separadas y tuplas de operadores
   - Antecedentes: vessels y operadores subnormales de tipo finito
   - Estructuras separadas
   - Compresión generalizada

Definición (Vessel)

H un espacio de Hilbert, E un espacio de Hilbert finito-dimensional.
$\Phi : H \to E$.
Operadores que conmutan $A_1, A_2 : H \to H$.
Operadores autoadjuntos $\sigma_1, \sigma_2, \gamma^{\text{in}}, \gamma^{\text{out}} : E \to E$ (matrices auxiliares).
La tupla $\mathcal{V} = (A_1, A_2; H, \Phi, E; \sigma_1, \sigma_2, \gamma^{\text{in}}, \gamma^{\text{out}})$ es un *vessel* si

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i}(A_k - A_k^*) &= \Phi^* \sigma_k \Phi, \\
\sigma_1 \Phi A_2^* - \sigma_2 \Phi A_1^* &= -\gamma^{\text{in}} \Phi, \\
\gamma^{\text{out}} &= \gamma^{\text{in}} + i(\sigma_1 \Phi \Phi^* \sigma_2 - \sigma_2 \Phi \Phi^* \sigma_1), \\
\sigma_2 \Phi A_1 - \sigma_1 \Phi A_2 &= -\gamma^{\text{out}} \Phi.
\end{aligned}$$

Estudiados por Livšic, Vinnikov y otros.

Si empezamos con A_1, A_2 con parte imaginaria finito-dimensional, podemos construir un vessel poniendo $E = (A_1 - A_1^*)H + (A_2 - A_2^*)H$ y $\Phi = P_E$. Entonces $\sigma_k = \frac{1}{i}(A_k - A_k^*)|E$.

Definición (Vessel)

H un espacio de Hilbert, E un espacio de Hilbert finito-dimensional.
$\Phi : H \to E$.
Operadores que conmutan $A_1, A_2 : H \to H$.
Operadores autoadjuntos $\sigma_1, \sigma_2, \gamma^{\text{in}}, \gamma^{\text{out}} : E \to E$ (matrices auxiliares).
La tupla $\mathcal{V} = (A_1, A_2; H, \Phi, E; \sigma_1, \sigma_2, \gamma^{\text{in}}, \gamma^{\text{out}})$ es un *vessel* si

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i}(A_k - A_k^*) &= \Phi^* \sigma_k \Phi, \\
\sigma_1 \Phi A_2^* - \sigma_2 \Phi A_1^* &= -\gamma^{\text{in}} \Phi, \\
\gamma^{\text{out}} &= \gamma^{\text{in}} + i(\sigma_1 \Phi \Phi^* \sigma_2 - \sigma_2 \Phi \Phi^* \sigma_1), \\
\sigma_2 \Phi A_1 - \sigma_1 \Phi A_2 &= -\gamma^{\text{out}} \Phi.
\end{aligned}$$

Estudiados por Livšic, Vinnikov y otros.

Si empezamos con A_1, A_2 con parte imaginaria finito-dimensional, podemos construir un vessel poniendo $E = (A_1 - A_1^*)H + (A_2 - A_2^*)H$ y $\Phi = P_E$. Entonces $\sigma_k = \frac{1}{i}(A_k - A_k^*)|E$.

$$\sigma_2\Phi A_1 - \sigma_1\Phi A_2 + \gamma^{\text{out}}\Phi = 0.$$

Polinomio discriminante:

$$\Delta(x_1, x_2) = \det(x_1\sigma_2 - x_2\sigma_1 + \gamma^{\text{in}}) = \det(x_1\sigma_2 - x_2\sigma_1 + \gamma^{\text{out}}).$$

Curva discriminante:

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : \Delta(x_1, x_2) = 0\}.$$

Theorem (Cayley-Hamilton generalizado)

$$\Delta(A_1, A_2) = 0, \qquad \Delta(A_1^*, A_2^*) = 0.$$

En particular, $\sigma(A_1, A_2) \subset X$.

El teorema clásico de Cayley-Hamilton se obtiene poniendo $A_1 = A$, $A_2 = iI$, $E = H = \mathbb{C}^n$ y $\Phi = I$.

$$\sigma_2\Phi A_1 - \sigma_1\Phi A_2 + \gamma^{\text{out}}\Phi = 0.$$

Polinomio discriminante:

$$\Delta(x_1, x_2) = \det(x_1\sigma_2 - x_2\sigma_1 + \gamma^{\text{in}}) = \det(x_1\sigma_2 - x_2\sigma_1 + \gamma^{\text{out}}).$$

Curva discriminante:

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : \Delta(x_1, x_2) = 0\}.$$

Theorem (Cayley-Hamilton generalizado)

$$\Delta(A_1, A_2) = 0, \qquad \Delta(A_1^*, A_2^*) = 0.$$

En particular, $\sigma(A_1, A_2) \subset X$.

El teorema clásico de Cayley-Hamilton se obtiene poniendo $A_1 = A$, $A_2 = iI$, $E = H = \mathbb{C}^n$ y $\Phi = I$.

Operadores subnormales de tipo finito (según Xia y Yakubovich)

$S \in \mathcal{B}(H)$ es subnormal si $S = N|H$, con $N \in \mathcal{B}(K)$ normal.
S es subnormal puro si no existe un subespacio no trivial H_0 que reduzca a S y tal que $S|H_0$ sea normal.

La extensión normal mínima: $N = \begin{bmatrix} S'^* & 0 \\ X & S \end{bmatrix}.$

S es subnormal de tipo finito si su autoconmutador

$$C = S^*S - SS^*$$

tiene rango finito.
Si S es subnormal puro de tipo finito,

$$K = H_{0,-} \oplus M_- \oplus M_+ \oplus H_{0,+},$$

con $M_+ = CH$, $\dim M_- = \dim M_+ < \infty$, y

$$N = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & \Lambda_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & T_0 & \Lambda_0 & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix},$$

con $T_0 : M_- \to M_+$ invertible.

$S \in \mathcal{B}(H)$ es subnormal si $S = N|H$, con $N \in \mathcal{B}(K)$ normal.
S es subnormal puro si no existe un subespacio no trivial H_0 que reduzca a S y tal que $S|H_0$ sea normal.

La extensión normal mínima: $N = \begin{bmatrix} S'^* & 0 \\ X & S \end{bmatrix}$.

S es subnormal de tipo finito si su autoconmutador

$$C = S^*S - SS^*$$

tiene rango finito.
Si S es subnormal puro de tipo finito,

$$K = H_{0,-} \oplus M_- \oplus M_+ \oplus H_{0,+},$$

con $M_+ = CH$, $\dim M_- = \dim M_+ < \infty$, y

$$N = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & \Lambda_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & T_0 & \Lambda_0 & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix},$$

con $T_0 : M_- \to M_+$ invertible.

Operadores subnormales de tipo finito (según Xia y Yakubovich)

$S \in \mathcal{B}(H)$ es subnormal si $S = N|H$, con $N \in \mathcal{B}(K)$ normal.
S es subnormal puro si no existe un subespacio no trivial H_0 que reduzca a S y tal que $S|H_0$ sea normal.

La extensión normal mínima: $N = \begin{bmatrix} S'^* & 0 \\ X & S \end{bmatrix}$.

S es subnormal de tipo finito si su autoconmutador

$$C = S^* S - SS^*$$

tiene rango finito.
Si S es subnormal puro de tipo finito,

$$K = H_{0,-} \oplus M_- \oplus M_+ \oplus H_{0,+},$$

con $M_+ = CH$, $\dim M_- = \dim M_+ < \infty$, y

$$N = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & \Lambda_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & T_0 & \Lambda_0 & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix},$$

con $T_0 : M_- \to M_+$ invertible.

Operadores subnormales de tipo finito (según Xia y Yakubovich)

$S \in \mathcal{B}(H)$ es subnormal si $S = N|H$, con $N \in \mathcal{B}(K)$ normal.
S es subnormal puro si no existe un subespacio no trivial H_0 que reduzca a S y tal que $S|H_0$ sea normal.

La extensión normal mínima: $N = \begin{bmatrix} S'^* & 0 \\ X & S \end{bmatrix}$.

S es subnormal de tipo finito si su autoconmutador

$$C = S^* S - SS^*$$

tiene rango finito.
Si S es subnormal puro de tipo finito,

$$K = H_{0,-} \oplus M_- \oplus M_+ \oplus H_{0,+},$$

con $M_+ = CH$, $\dim M_- = \dim M_+ < \infty$, y

$$N = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & \Lambda_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & T_0 & \Lambda_0 & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix},$$

con $T_0 : M_- \to M_+$ invertible.

La curva discriminante y función mosaico de Xia

Curva discriminante:

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C} : \det(T_0 T_0^* - (w - \Lambda_0)^*(z - \Lambda_0)) = 0\}.$$

$\sigma(N) \subset \{z \in \mathbb{C} : (z, \overline{z}) \in X\}$.

La ecuación puede reescribirse en una forma similar a la de un vessel:

$$\det(x_1\sigma_2 - x_2\sigma_1 + \gamma) = 0,$$

donde $z = x_1 + ix_2$, $w = x_1 - ix_2$ y

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & -iT_0^* \\ iT_0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & T_0^* \\ T_0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \gamma = -\begin{bmatrix} T_0^* T_0 & T_0^* \Lambda_0 \\ T_0 \Lambda_{-1}^* & T_0 T_0^* \end{bmatrix}.$$

La función mosaico de Xia:

$$\mu(z) = P_{M_+}(N - SP_H)(N - z)^{-1}|M_+.$$

La función mosaico y curva discriminante pueden usarse para construir un modelo analítico para S.

La curva discriminante y función mosaico de Xia

Curva discriminante:

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C} : \det(T_0 T_0^* - (w - \Lambda_0)^*(z - \Lambda_0)) = 0\}.$$

$\sigma(N) \subset \{z \in \mathbb{C} : (z, \overline{z}) \in X\}$.

La ecuación puede reescribirse en una forma similar a la de un vessel:

$$\det(x_1\sigma_2 - x_2\sigma_1 + \gamma) = 0,$$

donde $z = x_1 + ix_2$, $w = x_1 - ix_2$ y

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & -iT_0^* \\ iT_0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & T_0^* \\ T_0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \gamma = -\begin{bmatrix} T_0^* T_0 & T_0^* \Lambda_0 \\ T_0 \Lambda_{-1}^* & T_0 T_0^* \end{bmatrix}.$$

La función mosaico de Xia:

$$\mu(z) = P_{M_+}(N - SP_H)(N - z)^{-1}|M_+.$$

La función mosaico y curva discriminante pueden usarse para construir un modelo analítico para S.

La curva discriminante y función mosaico de Xia

Curva discriminante:

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C} : \det(T_0 T_0^* - (w - \Lambda_0)^*(z - \Lambda_0)) = 0\}.$$

$\sigma(N) \subset \{z \in \mathbb{C} : (z, \overline{z}) \in X\}$.

La ecuación puede reescribirse en una forma similar a la de un vessel:

$$\det(x_1\sigma_2 - x_2\sigma_1 + \gamma) = 0,$$

donde $z = x_1 + ix_2$, $w = x_1 - ix_2$ y

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & -iT_0^* \\ iT_0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & T_0^* \\ T_0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \gamma = -\begin{bmatrix} T_0^* T_0 & T_0^* \Lambda_0 \\ T_0 \Lambda_{-1}^* & T_0 T_0^* \end{bmatrix}.$$

La función mosaico de Xia:

$$\mu(z) = P_{M_+}(N - SP_H)(N - z)^{-1}|M_+.$$

La función mosaico y curva discriminante pueden usarse para construir un modelo analítico para S.

Estructura

1. Funciones test y conjuntos K-espectrales
   - Colecciones test
   - Subálgebras de funciones analíticas
   - Aplicación: operadores con el espectro en una curva

2. Estructuras separadas y tuplas de operadores
   - Antecedentes: vessels y operadores subnormales de tipo finito
   - Estructuras separadas
   - Compresión generalizada

Definición

Una *estructura separada* es un espacio de Hilbert K, un par de operadores autoadjuntos $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(K)$ que conmutan y una descomposición

$$K = \overbrace{H_{0,-} \oplus M_-}^{H_-} \oplus \overbrace{M_+ \oplus H_{0,+}}^{H_+},$$

con $\dim M_- = \dim M_+ < \infty$ tal que A_1, A_2 tienen la estructura

$$A_j = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}, \qquad j = 1, 2.$$

Normalmente trabajamos con el operador normal $N = A_1 + iA_2$ en lugar de con el par A_1, A_2.

El espacio $M = M_- \oplus M_+$ juega el mismo papel que el espacio finito-dimensional E en la teoría de vessels.

Un ejemplo: N la extensión normal mínima de un operador subnormal puro de tipo finito.

Definición

Una *estructura separada* es un espacio de Hilbert K, un par de operadores autoadjuntos $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(K)$ que conmutan y una descomposición

$$K = \overbrace{H_{0,-} \oplus M_-}^{H_-} \oplus \overbrace{M_+ \oplus H_{0,+}}^{H_+},$$

con $\dim M_- = \dim M_+ < \infty$ tal que A_1, A_2 tienen la estructura

$$A_j = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}, \qquad j = 1, 2.$$

Normalmente trabajamos con el operador normal $N = A_1 + iA_2$ en lugar de con el par A_1, A_2.
El espacio $M = M_- \oplus M_+$ juega el mismo papel que el espacio finito-dimensional E en la teoría de vessels.

Un ejemplo: N la extensión normal mínima de un operador subnormal puro de tipo finito.

Definición

Una *estructura separada* es un espacio de Hilbert K, un par de operadores autoadjuntos $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(K)$ que conmutan y una descomposición

$$K = \overbrace{H_{0,-} \oplus M_-}^{H_-} \oplus \overbrace{M_+ \oplus H_{0,+}}^{H_+},$$

con $\dim M_- = \dim M_+ < \infty$ tal que A_1, A_2 tienen la estructura

$$A_j = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}, \qquad j = 1, 2.$$

Normalmente trabajamos con el operador normal $N = A_1 + iA_2$ en lugar de con el par A_1, A_2.
El espacio $M = M_- \oplus M_+$ juega el mismo papel que el espacio finito-dimensional E en la teoría de vessels.

Un ejemplo: N la extensión normal mínima de un operador subnormal puro de tipo finito.

Ejemplo con $N = M_f$ en $L^2(\mathbb{T})$

$K = L^2(\mathbb{T})$, $H_- = H_0^2(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$, $H_+ = H^2(\mathbb{D})$.
$N = M_f$ con f racional sin polos en $\mathbb{T}$.
$A_j = M_{f_j}$, con $f_1(z) = \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f(\overline{z}^{-1})})$, $f_2(z) = \frac{1}{2i}(f(z) - \overline{f(\overline{z}^{-1})})$.
Sea B el producto de Blaschke finito cuyos ceros son los polos de f_1 y f_2 en $\mathbb{D}$ (contando multiplicidades): Bf_1 y Bf_2 son analíticas en $\mathbb{D}$ y B es mínimo con esta propiedad.
Entonces, poniendo

$$\begin{aligned} H_{0,-} &= B^{-1} H_0^2(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}), \\ M_- &= H_0^2(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) \ominus B^{-1} H_0^2(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}), \\ M_+ &= H^2(\mathbb{D}) \ominus BH^2(\mathbb{D}), \\ H_{0,+} &= BH^2(\mathbb{D}), \end{aligned}$$

A_1, A_2 forman una estructura separada.

Ejemplo sencillo: $f(z) = az + bz^{-1} + c$. Entonces $B(z) = z$ y $\dim M_- = \dim M_+ = 1$.

Ejemplo con $N = M_f$ en $L^2(\mathbb{T})$

$K = L^2(\mathbb{T})$, $H_- = H_0^2(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$, $H_+ = H^2(\mathbb{D})$.
$N = M_f$ con f racional sin polos en $\mathbb{T}$.
$A_j = M_{f_j}$, con $f_1(z) = \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f(\overline{z}^{-1})})$, $f_2(z) = \frac{1}{2i}(f(z) - \overline{f(\overline{z}^{-1})})$.
Sea B el producto de Blaschke finito cuyos ceros son los polos de f_1 y f_2 en $\mathbb{D}$ (contando multiplicidades): Bf_1 y Bf_2 son analíticas en $\mathbb{D}$ y B es mínimo con esta propiedad.
Entonces, poniendo

$$\begin{aligned} H_{0,-} &= B^{-1} H_0^2(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}), \\ M_- &= H_0^2(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) \ominus B^{-1} H_0^2(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}), \\ M_+ &= H^2(\mathbb{D}) \ominus BH^2(\mathbb{D}), \\ H_{0,+} &= BH^2(\mathbb{D}), \end{aligned}$$

A_1, A_2 forman una estructura separada.

Ejemplo sencillo: $f(z) = az + bz^{-1} + c$. Entonces $B(z) = z$ y $\dim M_- = \dim M_+ = 1$.

Matrices auxiliares y pools

Definimos matrices auxiliares autoadjuntas $\sigma_1, \sigma_2, \gamma \in \mathcal{B}(M)$ mediante

$$\sigma_j P_M = -i(P_{H_+} A_j - A_j P_{H_+}), \qquad \gamma P_M = i(A_1 P_{H_+} A_2 - A_2 P_{H_+} A_1).$$

Entonces se cumple la relación

$$\sigma_2 P_M A_1 - \sigma_1 P_M A_2 + \gamma P_M = 0,$$

que recuerda a una de las relaciones en la definición de vessel.

Definición

Un *pool* es un espacio de Hilbert K, un espacio de Hilbert finito-dimensional M, un operador acotado $\Phi : K \to M$, dos operadores autoadjuntos $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(K)$ que conmutan y matrices autoadjuntas $\sigma_1, \sigma_2, \gamma \in \mathcal{B}(M)$ tales que

$$\sigma_2 \Phi A_1 - \sigma_1 \Phi A_2 + \gamma \Phi = 0.$$

La curva discriminante:

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : \det(x_1 \sigma_2 - x_2 \sigma_1 + \gamma) = 0\}.$$

$\sigma(A_1, A_2) \subset X \cap \mathbb{R}^2$.

Matrices auxiliares y pools

Definimos matrices auxiliares autoadjuntas $\sigma_1, \sigma_2, \gamma \in \mathcal{B}(M)$ mediante

$$\sigma_j P_M = -i(P_{H_+} A_j - A_j P_{H_+}), \qquad \gamma P_M = i(A_1 P_{H_+} A_2 - A_2 P_{H_+} A_1).$$

Entonces se cumple la relación

$$\sigma_2 P_M A_1 - \sigma_1 P_M A_2 + \gamma P_M = 0,$$

que recuerda a una de las relaciones en la definición de vessel.

Definición

Un *pool* es un espacio de Hilbert K, un espacio de Hilbert finito-dimensional M, un operador acotado $\Phi : K \to M$, dos operadores autoadjuntos $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(K)$ que conmutan y matrices autoadjuntas $\sigma_1, \sigma_2, \gamma \in \mathcal{B}(M)$ tales que

$$\sigma_2 \Phi A_1 - \sigma_1 \Phi A_2 + \gamma \Phi = 0.$$

La curva discriminante:

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : \det(x_1 \sigma_2 - x_2 \sigma_1 + \gamma) = 0\}.$$

$\sigma(A_1, A_2) \subset X \cap \mathbb{R}^2$.

Matrices auxiliares y pools

Definimos matrices auxiliares autoadjuntas $\sigma_1, \sigma_2, \gamma \in \mathcal{B}(M)$ mediante

$$\sigma_j P_M = -i(P_{H_+} A_j - A_j P_{H_+}), \qquad \gamma P_M = i(A_1 P_{H_+} A_2 - A_2 P_{H_+} A_1).$$

Entonces se cumple la relación

$$\sigma_2 P_M A_1 - \sigma_1 P_M A_2 + \gamma P_M = 0,$$

que recuerda a una de las relaciones en la definición de vessel.

Definición

Un *pool* es un espacio de Hilbert K, un espacio de Hilbert finito-dimensional M, un operador acotado $\Phi : K \to M$, dos operadores autoadjuntos $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(K)$ que conmutan y matrices autoadjuntas $\sigma_1, \sigma_2, \gamma \in \mathcal{B}(M)$ tales que

$$\sigma_2 \Phi A_1 - \sigma_1 \Phi A_2 + \gamma \Phi = 0.$$

La curva discriminante:

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : \det(x_1 \sigma_2 - x_2 \sigma_1 + \gamma) = 0\}.$$

$\sigma(A_1, A_2) \subset X \cap \mathbb{R}^2$.

Matrices auxiliares en términos del operador N

$N = A_1 + iA_2$ (más en general, $N_\xi = \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2$)
$\alpha = i\sigma_1 - \sigma_2$, $\gamma_{(1,i)} = -2\gamma$

$$\alpha^* \Phi N + \alpha \Phi N^* + \gamma_{(1,i)} = 0.$$

Ponemos coordenadas $z = x_1 + ix_2$, $w = x_1 - ix_2$ en $\mathbb{C}^2$.

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \det(z\alpha^* + w\alpha + \gamma_{(1,i)}) = 0\}.$$

$\sigma(N) \subset X \cap \{(z, \overline{z})\}$.

Ejemplo sencillo: $N = M_f$, $f(z) = az + bz^{-1} + c$

$$s = P_M N|M = \begin{bmatrix} c & b \\ a & c \end{bmatrix}, \qquad \alpha = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ a & 0 \end{bmatrix},$$

$$\gamma_{(1,i)} = -(\alpha^* s + \alpha s^*) = \begin{bmatrix} |b|^2 - |a|^2 & b\overline{c} - \overline{a}c \\ \overline{b}c - a\overline{c} & |b|^2 - |a|^2 \end{bmatrix}.$$

$N = A_1 + iA_2$ (más en general, $N_\xi = \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2$)
$\alpha = i\sigma_1 - \sigma_2$, $\gamma_{(1,i)} = -2\gamma$

$$\alpha^* \Phi N + \alpha \Phi N^* + \gamma_{(1,i)} = 0.$$

Ponemos coordenadas $z = x_1 + ix_2$, $w = x_1 - ix_2$ en $\mathbb{C}^2$.

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \det(z\alpha^* + w\alpha + \gamma_{(1,i)}) = 0\}.$$

$\sigma(N) \subset X \cap \{(z, \overline{z})\}$.

Ejemplo sencillo: $N = M_f$, $f(z) = az + bz^{-1} + c$

$$s = P_M N|M = \begin{bmatrix} c & b \\ a & c \end{bmatrix}, \qquad \alpha = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ a & 0 \end{bmatrix},$$

$$\gamma_{(1,i)} = -(\alpha^* s + \alpha s^*) = \begin{bmatrix} |b|^2 - |a|^2 & b\overline{c} - \overline{a}c \\ \overline{b}c - a\overline{c} & |b|^2 - |a|^2 \end{bmatrix}.$$

Función mosaico

Definición

La funcion mosaico ν es

$$\nu(z) = P_M(N - z)^{-1} P_{H_+}(N - z)|M, \qquad z \notin \sigma(N).$$

Sus valores son proyecciones paralelas en M.

En el caso en el que la estructura separada proviene de un operador subnormal puro de tipo finito, la función mosaico $\mu(z)$ de Xia puede escribirse en términos de $\nu(z)$.

Las matrices auxiliares $\alpha, \gamma_{(1,i)}$ y la función mosaico ν contienen toda la información sobre la estructura separada. El operador N se puede recuperar mediante la siguiente "fórmula para núcleos reproductores":

$$P_M(N - z)^{-1}(N^* - \overline{w})^{-1} P_M = (\gamma_{(1,i)} + z\alpha^* + w\alpha)^{-1}(P_M - \alpha\nu(z)\alpha^{-1} P_M - \nu^*(z) P_M).$$

Pregunta: ¿Se puede recuperar la función mosaico ν a partir de las matrices $\alpha, \gamma_{(1,i)}$? En este caso, la estructura separada (que contiene objetos infinito-dimensionales) vendría definida por una cantidad finito-dimensional de datos.

Función mosaico

Definición

La funcion mosaico ν es

$$\nu(z) = P_M(N-z)^{-1}P_{H_+}(N-z)|M, \qquad z \notin \sigma(N).$$

Sus valores son proyecciones paralelas en M.

En el caso en el que la estructura separada proviene de un operador subnormal puro de tipo finito, la función mosaico $\mu(z)$ de Xia puede escribirse en términos de $\nu(z)$.

Las matrices auxiliares $\alpha, \gamma_{(1,i)}$ y la función mosaico ν contienen toda la información sobre la estructura separada. El operador N se puede recuperar mediante la siguiente "fórmula para núcleos reproductores":

$$P_M(N-z)^{-1}(N^*-\overline{w})^{-1}P_M = (\gamma_{(1,i)} + z\alpha^* + w\alpha)^{-1}(P_M - \alpha\nu(z)\alpha^{-1}P_M - \nu^*(z)P_M).$$

Pregunta: ¿Se puede recuperar la función mosaico ν a partir de las matrices $\alpha, \gamma_{(1,i)}$? En este caso, la estructura separada (que contiene objetos infinito-dimensionales) vendría definida por una cantidad finito-dimensional de datos.

Función mosaico

Definición

La funcion mosaico ν es

$$\nu(z) = P_M(N-z)^{-1}P_{H_+}(N-z)|M, \qquad z \notin \sigma(N).$$

Sus valores son proyecciones paralelas en M.

En el caso en el que la estructura separada proviene de un operador subnormal puro de tipo finito, la función mosaico $\mu(z)$ de Xia puede escribirse en términos de $\nu(z)$.

Las matrices auxiliares $\alpha, \gamma_{(1,i)}$ y la función mosaico ν contienen toda la información sobre la estructura separada. El operador N se puede recuperar mediante la siguiente "fórmula para núcleos reproductores":

$$P_M(N-z)^{-1}(N^*-\overline{w})^{-1}P_M = (\gamma_{(1,i)} + z\alpha^* + w\alpha)^{-1}(P_M - \alpha\nu(z)\alpha^{-1}P_M - \nu^*(z)P_M).$$

Pregunta: ¿Se puede recuperar la función mosaico ν a partir de las matrices $\alpha, \gamma_{(1,i)}$? En este caso, la estructura separada (que contiene objetos infinito-dimensionales) vendría definida por una cantidad finito-dimensional de datos.

Función mosaico

Definición

La funcion mosaico ν es

$$\nu(z) = P_M(N - z)^{-1} P_{H_+}(N - z)|M, \qquad z \notin \sigma(N).$$

Sus valores son proyecciones paralelas en M.

En el caso en el que la estructura separada proviene de un operador subnormal puro de tipo finito, la función mosaico $\mu(z)$ de Xia puede escribirse en términos de $\nu(z)$.

Las matrices auxiliares $\alpha, \gamma_{(1,i)}$ y la función mosaico ν contienen toda la información sobre la estructura separada. El operador N se puede recuperar mediante la siguiente "fórmula para núcleos reproductores":

$$P_M(N - z)^{-1}(N^* - \overline{w})^{-1} P_M = (\gamma_{(1,i)} + z\alpha^* + w\alpha)^{-1}(P_M - \alpha\nu(z)\alpha^{-1} P_M - \nu^*(z) P_M).$$

Pregunta: ¿Se puede recuperar la función mosaico ν a partir de las matrices $\alpha, \gamma_{(1,i)}$? En este caso, la estructura separada (que contiene objetos infinito-dimensionales) vendría definida por una cantidad finito-dimensional de datos.

Curvas algebraicas separadas

La curva discriminante X es una curva real, pues $\sigma_1, \sigma_2, \gamma$ son matrices autoadjuntas.

La involución $(x_1, x_2) \mapsto (\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ actúa sobre la curva X. La parte real de la curva $X_{\mathbb{R}} = X \cap \mathbb{R}^2$ son los puntos fijos por la involución.

Una curva se dice separada si su parte real divide la curva en dos mitades que son conjugadas por la involución (pensamos en curvas algebraicas como su superficie de Riemann correspondiente).

Bajo ciertas hipótesis débiles, la curva discriminante de una estructura separada es separada. Las dos mitades se pueden utilizar para reconstruir la función mosaico ν usando una función meromorfa Q definida en la curva cuyos valores son proyecciones paralelas en M.

Ponemos

$$\Sigma = -\alpha^{-1}\alpha^*, \qquad D = -\alpha^{-1}\gamma_{(1,i)}.$$

La ecuación de la curva se reescribe como

$$\det(z\Sigma + D - w) = 0$$

Si $p = (z, w) \in X$, ponemos

$$Q(p) = \Pi_w(z\Sigma + D) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda - w| = \varepsilon} (z\Sigma + D - \lambda)^{-1}, d\lambda.$$

Entonces $Q(p)$ es una proyección paralela en M y para cada z_0

$$\sum_{p=(z_0,w)\in X} Q(p) = I_M.$$

Q es una función meromorfa en la superficie de Riemann de X.

Fórmula de restauración

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma^- & 0 \\ 0 & \Sigma_+ \end{bmatrix}.$$

En el ejemplo sencillo $N = M_f$, $f(z) = az + bz^{-1} + c$,

$$\Sigma = -\begin{bmatrix} \frac{\overline{b}}{b} & 0 \\ 0 & \frac{\overline{a}}{a} \end{bmatrix}.$$

Teorema

Si $\sigma(\Sigma^-) \cap \sigma(\Sigma^+) = \emptyset$, entonces la curva discriminante X es separada, $X = X_- \cup X_{\mathbb{R}} \cup X_+$ y para cada z_0,

$$\nu(z_0) = \sum_{p=(z_0,w)\in X_+} Q(p).$$

Idea de la prueba: Elegir las mitades para que la fórmula se cumpla en los puntos en el infinito de X. Si $p \in X_\infty$,

$$Q(p) = \Pi_{w/z}(\Sigma)$$

y $\nu(\infty) = P_{M_+}$. Se decide si $p \in X_-$ o $p \in X_+$ según si $w/z \in \sigma(\Sigma^-)$ o $w/z \in \sigma(\Sigma^+)$. Después extender la igualdad a un entorno de los puntos en infinito por continuidad y luego a toda la curva utilizando la fórmula de salto de Plemelj.

Fórmula de restauración

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma^- & 0 \\ 0 & \Sigma_+ \end{bmatrix}.$$

En el ejemplo sencillo $N = M_f$, $f(z) = az + bz^{-1} + c$,

$$\Sigma = -\begin{bmatrix} \frac{\overline{b}}{b} & 0 \\ 0 & \frac{\overline{a}}{a} \end{bmatrix}.$$

Teorema

Si $\sigma(\Sigma^-) \cap \sigma(\Sigma^+) = \emptyset$, entonces la curva discriminante X es separada, $X = X_- \cup X_\mathbb{R} \cup X_+$ y para cada z_0,

$$\nu(z_0) = \sum_{p=(z_0,w)\in X_+} Q(p).$$

Idea de la prueba: Elegir las mitades para que la fórmula se cumpla en los puntos en el infinito de X. Si $p \in X_\infty$,

$$Q(p) = \Pi_{w/z}(\Sigma)$$

y $\nu(\infty) = P_{M_+}$. Se decide si $p \in X_-$ o $p \in X_+$ según si $w/z \in \sigma(\Sigma^-)$ o $w/z \in \sigma(\Sigma^+)$. Después extender la igualdad a un entorno de los puntos en infinito por continuidad y luego a toda la curva utilizando la fórmula de salto de Plemelj.

Estructura

1. Funciones test y conjuntos K-espectrales
   - Colecciones test
   - Subálgebras de funciones analíticas
   - Aplicación: operadores con el espectro en una curva

2. Estructuras separadas y tuplas de operadores
   - Antecedentes: vessels y operadores subnormales de tipo finito
   - Estructuras separadas
   - Compresión generalizada

Compresión generalizada

$K \supset H \supset G$ espacios vectoriales. $A : K \to K$ lineal.
La compresión: $\widetilde{A} : H/G \to H/G$.
Hipótesis:

$$AG \cap H \subset G, \tag{C1}$$

$$AH \subset AG + H. \tag{C2}$$

Definición

Definimos la compresión $\widetilde{A} : H/G \to H/G$ de la siguiente forma:

1. Dado $h \in H$, encontramos $g \in G$ tal que $h' \stackrel{\text{def}}{=} A(h - g) \in H$ (por (C2)).
2. $\widetilde{A}(h + G) \stackrel{\text{def}}{=} h' + G$.

Esto está bien definido por (C1).

Si $K = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ y

$$A = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & A_0 & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix},$$

la compresion clásica A_0 puede obtenerse poniendo $G = H_3$, $H = H_2 \oplus H_3$.
En la compresión generalizada no es necesario que G o H sean invariantes por A.

Compresión generalizada

$K \supset H \supset G$ espacios vectoriales. $A : K \to K$ lineal.
La compresión: $\widetilde{A} : H/G \to H/G$.
Hipótesis:

$$AG \cap H \subset G, \tag{C1}$$

$$AH \subset AG + H. \tag{C2}$$

Definición

Definimos la compresión $\widetilde{A} : H/G \to H/G$ de la siguiente forma:

1. Dado $h \in H$, encontramos $g \in G$ tal que $h' \stackrel{\text{def}}{=} A(h-g) \in H$ (por (C2)).
2. $\widetilde{A}(h+G) \stackrel{\text{def}}{=} h' + G$.

Esto está bien definido por (C1).

Si $K = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ y

$$A = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & A_0 & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix},$$

la compresion clásica A_0 puede obtenerse poniendo $G = H_3$, $H = H_2 \oplus H_3$.
En la compresión generalizada no es necesario que G o H sean invariantes por A.

Compresión generalizada

$K \supset H \supset G$ espacios vectoriales. $A : K \to K$ lineal.
La compresión: $\widetilde{A} : H/G \to H/G$.
Hipótesis:

$$AG \cap H \subset G, \tag{C1}$$

$$AH \subset AG + H. \tag{C2}$$

Definición

Definimos la compresión $\widetilde{A} : H/G \to H/G$ de la siguiente forma:

1. Dado $h \in H$, encontramos $g \in G$ tal que $h' \stackrel{\text{def}}{=} A(h - g) \in H$ (por (C2)).
2. $\widetilde{A}(h + G) \stackrel{\text{def}}{=} h' + G$.

Esto está bien definido por (C1).

Si $K = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ y

$$A = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & A_0 & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix},$$

la compresion clásica A_0 puede obtenerse poniendo $G = H_3$, $H = H_2 \oplus H_3$.
En la compresión generalizada no es necesario que G o H sean invariantes por A.

Compresión de estructuras separadas

$A_1, A_2 : K \to K$ autoadjuntos. Dos estructuras separadas para A_1, A_2

$$K = \overbrace{H_{0,-} \oplus M_-}^{H_-} \oplus \overbrace{M_+ \oplus H_{0,+}}^{H_+}, \quad K = \overbrace{\widehat{H}_{0,-} \oplus \widehat{M}_-}^{\widehat{H}_-} \oplus \overbrace{\widehat{M}_+ \oplus \widehat{H}_{0,+}}^{\widehat{H}_+},$$

tales que

$$H_- \subset \widehat{H}_-, \qquad \widehat{H}_+ \subset H_+.$$

Lema

Los operadores A_1, A_2 se pueden comprimir a $H_+/\widehat{H}_+$ si y solo si $P_{M_+}|\widehat{M}_+ : \widehat{M}_+ \to M_+$ es invertible.

Teorema

Denotando por $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2$ las compresiones generalizadas, obtenemos los siguientes vessels:

$$\left(\widetilde{A}_1^*, \widetilde{A}_2^*; H_+/\widehat{H}_+, \widetilde{\Phi}, M; \sigma_1, \sigma_2, \gamma^{in} = \gamma - i(\sigma_1\widetilde{\Phi}\widetilde{\Phi}^*\sigma_2 - \sigma_2\widetilde{\Phi}\widetilde{\Phi}^*\sigma_1), \gamma^{out} = \gamma\right)$$

$$\left(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2; H_+/\widehat{H}_+, -\widetilde{\Phi}, M; -\sigma_1, -\sigma_2, \gamma^{in} = -\gamma, \gamma^{out} = -\gamma + i(\sigma_1\widetilde{\Phi}\widetilde{\Phi}^*\sigma_2 - \sigma_2\widetilde{\Phi}\widetilde{\Phi}^*\sigma_1)\right)$$

Compresión de estructuras separadas

$A_1, A_2 : K \to K$ autoadjuntos. Dos estructuras separadas para A_1, A_2

$$K = \overbrace{H_{0,-} \oplus M_-}^{H_-} \oplus \overbrace{M_+ \oplus H_{0,+}}^{H_+}, \quad K = \overbrace{\widehat{H}_{0,-} \oplus \widehat{M}_-}^{\widehat{H}_-} \oplus \overbrace{\widehat{M}_+ \oplus \widehat{H}_{0,+}}^{\widehat{H}_+},$$

tales que

$$H_- \subset \widehat{H}_-, \qquad \widehat{H}_+ \subset H_+.$$

Lema

Los operadores A_1, A_2 se pueden comprimir a $H_+/\widehat{H}_+$ si y solo si $P_{M_+}|\widehat{M}_+ : \widehat{M}_+ \to M_+$ es invertible.

Teorema

Denotando por $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2$ las compresiones generalizadas, obtenemos los siguientes vessels:

$$\left(\widetilde{A}_1^*, \widetilde{A}_2^*; H_+/\widehat{H}_+, \widetilde{\Phi}, M; \sigma_1, \sigma_2, \gamma^{in} = \gamma - i(\sigma_1\widetilde{\Phi}\widetilde{\Phi}^*\sigma_2 - \sigma_2\widetilde{\Phi}\widetilde{\Phi}^*\sigma_1), \gamma^{out} = \gamma\right)$$

$$\left(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2; H_+/\widehat{H}_+, -\widetilde{\Phi}, M; -\sigma_1, -\sigma_2, \gamma^{in} = -\gamma, \gamma^{out} = -\gamma + i(\sigma_1\widetilde{\Phi}\widetilde{\Phi}^*\sigma_2 - \sigma_2\widetilde{\Phi}\widetilde{\Phi}^*\sigma_1)\right)$$

Compresión de estructuras separadas

$A_1, A_2 : K \to K$ autoadjuntos. Dos estructuras separadas para A_1, A_2

$$K = \overbrace{H_{0,-} \oplus M_-}^{H_-} \oplus \overbrace{M_+ \oplus H_{0,+}}^{H_+}, \quad K = \overbrace{\widehat{H}_{0,-} \oplus \widehat{M}_-}^{\widehat{H}_-} \oplus \overbrace{\widehat{M}_+ \oplus \widehat{H}_{0,+}}^{\widehat{H}_+},$$

tales que

$$H_- \subset \widehat{H}_-, \qquad \widehat{H}_+ \subset H_+.$$

Lema

Los operadores A_1, A_2 se pueden comprimir a $H_+/\widehat{H}_+$ si y solo si $P_{M_+}|\widehat{M}_+ : \widehat{M}_+ \to M_+$ es invertible.

Teorema

Denotando por $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2$ las compresiones generalizadas, obtenemos los siguientes vessels:

$$\left(\widetilde{A}_1^*, \widetilde{A}_2^*; H_+/\widehat{H}_+, \widetilde{\Phi}, M; \sigma_1, \sigma_2, \gamma^{in} = \gamma - i(\sigma_1\widetilde{\Phi}\widetilde{\Phi}^*\sigma_2 - \sigma_2\widetilde{\Phi}\widetilde{\Phi}^*\sigma_1), \gamma^{out} = \gamma\right)$$

$$\left(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2; H_+/\widehat{H}_+, -\widetilde{\Phi}, M; -\sigma_1, -\sigma_2, \gamma^{in} = -\gamma, \gamma^{out} = -\gamma + i(\sigma_1\widetilde{\Phi}\widetilde{\Phi}^*\sigma_2 - \sigma_2\widetilde{\Phi}\widetilde{\Phi}^*\sigma_1)\right)$$

$N = M_f = A_1 + iA_2 = M_{f_1} + iM_{f_2}$ con f racional sin polos en $\mathbb{T}$.
$K = L^2(\mathbb{T})$, $H_- = H_0^2(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$, $H_+ = H^2(\mathbb{D})$
B el producto de Blaschke finito con ceros en los polos de f_1 y f_2.

Θ una función interna, $\widehat{H}_- = \Theta H_-$, $\widehat{H}_+ = \Theta H_+$.

Queremos realizar la compresión a $H_+/\widehat{H}_+ = H^2(\mathbb{D}) \ominus \Theta H^2(\mathbb{D})$.

Es posible realizar la compresion si y solo si B y Θ no tienen ceros en común.

Se obtiene el operador compresión $\widetilde{N} = \widetilde{A}_1 + i\widetilde{A}_2 = f(\mathcal{M}_\Theta)$, donde $\mathcal{M}_\Theta = P_\Theta M_z | K_\Theta$ es el operador modelo y $K_\Theta = H^2(\mathbb{D}) \ominus \Theta H^2(\mathbb{D})$.

Los espectros: $\sigma(N) = f(\mathbb{T})$, que es una curva. Por el teorema de Livšic-Moeller y el teorema de la aplicación espectral, $\sigma(\widetilde{N}) = f(\sigma(\Theta)) = f(Z) \cap f(\Delta)$, donde $Z \subset \mathbb{D}$ es una sucesión de Blaschke y $\Delta \subset \mathbb{T}$.