Generación de álgebras de funciones analíticas y separación de singularidades

Daniel Estévez

Universidad Autónoma de Madrid

Trabajo conjunto con Michael Dritschel (Newcastle) y Dmitry Yakubovich (UAM)

17 de febrero de 2017

Summary

Summary

1. Motivación: generación de álgebras y álgebras en curvas analíticas
2. Separación de singularidades
3. Resultados principales sobre generación de álgebras
4. Resultados principales sobre álgebras en curvas analíticas
5. Consecuencias para algunas subálgebras de $H^\infty(\Omega)$

- $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio
- $\mathfrak{A}$ un álgebra uniforme de funciones analíticas en Ω, $\mathfrak{A} = H^\infty(\Omega)$ o $\mathfrak{A} = A(\overline{\Omega}) = \mathcal{H}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$
- $\Phi \subset \mathfrak{A}$ una colección de elementos del álgebra (típicamente finita $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$)

Denotamos por $\overline{\mathfrak{A}_\Phi}$ la subálgebra cerrada (o débil* cerrada) más pequeña de $\mathfrak{A}$ que contiene a Φ.

Preguntas naturales:

- ¿Cuándo $\overline{\mathfrak{A}_\Phi} = \mathfrak{A}$?
- ¿Cuándo $\overline{\mathfrak{A}_\Phi}$ tiene codimensión finita en $\mathfrak{A}$?

Varios artículos estudian álgebras del tipo $A(\overline{\Omega})$ y dan condiciones suficientes para que $\overline{\mathfrak{A}_\Phi} = \mathfrak{A}$ (Wermer, Bishop, Blumenthal, Sibony-Wermer).
Sin embargo, incluso en el caso sencillo $\mathfrak{A} = A(\overline{\mathbb{D}})$, $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, no se conoce un conjunto de condiciones necesarias y suficientes para que $\overline{\mathfrak{A}_\Phi} = \mathfrak{A}$.

- $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio
- $\mathfrak{A}$ un álgebra uniforme de funciones analíticas en Ω, $\mathfrak{A} = H^\infty(\Omega)$ o $\mathfrak{A} = A(\overline{\Omega}) = \mathcal{H}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$
- $\Phi \subset \mathfrak{A}$ una colección de elementos del álgebra (típicamente finita $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$)

Denotamos por $\overline{\mathfrak{A}_\Phi}$ la subálgebra cerrada (o débil* cerrada) más pequeña de $\mathfrak{A}$ que contiene a Φ.

Preguntas naturales:

- ¿Cuándo $\overline{\mathfrak{A}_\Phi} = \mathfrak{A}$?
- ¿Cuándo $\overline{\mathfrak{A}_\Phi}$ tiene codimensión finita en $\mathfrak{A}$?

Varios artículos estudian álgebras del tipo $A(\overline{\Omega})$ y dan condiciones suficientes para que $\overline{\mathfrak{A}_\Phi} = \mathfrak{A}$ (Wermer, Bishop, Blumenthal, Sibony-Wermer).
Sin embargo, incluso en el caso sencillo $\mathfrak{A} = A(\overline{\mathbb{D}})$, $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, no se conoce un conjunto de condiciones necesarias y suficientes para que $\overline{\mathfrak{A}_\Phi} = \mathfrak{A}$.

Generación de álgebras en dominios de $\mathbb{C}$

- $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio
- $\mathfrak{A}$ un álgebra uniforme de funciones analíticas en Ω, $\mathfrak{A} = H^\infty(\Omega)$ o $\mathfrak{A} = A(\overline{\Omega}) = \mathcal{H}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$
- $\Phi \subset \mathfrak{A}$ una colección de elementos del álgebra (típicamente finita $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$)

Denotamos por $\overline{\mathfrak{A}_\Phi}$ la subálgebra cerrada (o débil* cerrada) más pequeña de $\mathfrak{A}$ que contiene a Φ.

Preguntas naturales:

- ¿Cuándo $\overline{\mathfrak{A}_\Phi} = \mathfrak{A}$?
- ¿Cuándo $\overline{\mathfrak{A}_\Phi}$ tiene codimensión finita en $\mathfrak{A}$?

Varios artículos estudian álgebras del tipo $A(\overline{\Omega})$ y dan condiciones suficientes para que $\overline{\mathfrak{A}_\Phi} = \mathfrak{A}$ (Wermer, Bishop, Blumenthal, Sibony-Wermer).
Sin embargo, incluso en el caso sencillo $\mathfrak{A} = A(\overline{\mathbb{D}})$, $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, no se conoce un conjunto de condiciones necesarias y suficientes para que $\overline{\mathfrak{A}_\Phi} = \mathfrak{A}$.

Generación de álgebras en dominios de $\mathbb{C}$

- $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio
- $\mathfrak{A}$ un álgebra uniforme de funciones analíticas en Ω, $\mathfrak{A} = H^\infty(\Omega)$ o $\mathfrak{A} = A(\overline{\Omega}) = \mathcal{H}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$
- $\Phi \subset \mathfrak{A}$ una colección de elementos del álgebra (típicamente finita $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$)

Denotamos por $\overline{\mathfrak{A}_\Phi}$ la subálgebra cerrada (o débil* cerrada) más pequeña de $\mathfrak{A}$ que contiene a Φ.

Preguntas naturales:

- ¿Cuándo $\overline{\mathfrak{A}_\Phi} = \mathfrak{A}$?
- ¿Cuándo $\overline{\mathfrak{A}_\Phi}$ tiene codimensión finita en $\mathfrak{A}$?

Varios artículos estudian álgebras del tipo $A(\overline{\Omega})$ y dan condiciones suficientes para que $\overline{\mathfrak{A}_\Phi} = \mathfrak{A}$ (Wermer, Bishop, Blumenthal, Sibony-Wermer).
Sin embargo, incluso en el caso sencillo $\mathfrak{A} = A(\overline{\mathbb{D}})$, $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, no se conoce un conjunto de condiciones necesarias y suficientes para que $\overline{\mathfrak{A}_\Phi} = \mathfrak{A}$.

Un tipo distinto de subálgebra

Obsérvese que toda $f \in \overline{\mathfrak{A}_\Phi}$ es límite de polinomios en $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Supongamos que $\varphi_k : \Omega \to \overline{\mathbb{D}}$. Podemos definir:

- $\mathcal{A}_\Phi$ la subálgebra más pequeña de $A(\overline{\Omega})$ que contiene a todas las funciones $g \circ \varphi_k$, $g \in A(\overline{\mathbb{D}})$
- $\mathcal{H}_\Phi$ la subálgebra más pequeña de $H^\infty(\Omega)$ que contiene a todas las funciones $g \circ \varphi_k$, $g \in H^\infty(\mathbb{D})$

Estas subálgebras no son cerradas necesariamente.

$f \in \mathcal{A}_\Phi$ es de la forma

$$f(z) = \sum_{k=1}^{N} g_{1,k}(\varphi_1(z)) g_{2,k}(\varphi_2(z)) \cdots g_{n,k}(\varphi_n(z)), \qquad g_{j,k} \in A(\overline{\mathbb{D}}).$$

Observación:

- Si $\mathfrak{A} = A(\overline{\Omega})$, entonces $\mathcal{A}_\Phi \subset \overline{\mathfrak{A}_\Phi}$
- Si $\mathfrak{A} = H^\infty(\overline{\Omega})$, entonces $\mathcal{H}_\Phi \subset \overline{\mathfrak{A}_\Phi}$

Estas álgebras tienen aplicaciones en Teoría de Operadores y en el estudio de álgebras uniformes en curvas analíticas.

Un tipo distinto de subálgebra

Obsérvese que toda $f \in \overline{\mathfrak{A}_\Phi}$ es límite de polinomios en $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Supongamos que $\varphi_k : \Omega \to \overline{\mathbb{D}}$. Podemos definir:

- $\mathcal{A}_\Phi$ la subálgebra más pequeña de $A(\overline{\Omega})$ que contiene a todas las funciones $g \circ \varphi_k$, $g \in A(\overline{\mathbb{D}})$
- $\mathcal{H}_\Phi$ la subálgebra más pequeña de $H^\infty(\Omega)$ que contiene a todas las funciones $g \circ \varphi_k$, $g \in H^\infty(\mathbb{D})$

Estas subálgebras no son cerradas necesariamente.

$f \in \mathcal{A}_\Phi$ es de la forma

$$f(z) = \sum_{k=1}^{N} g_{1,k}(\varphi_1(z))g_{2,k}(\varphi_2(z)) \cdots g_{n,k}(\varphi_n(z)), \qquad g_{j,k} \in A(\overline{\mathbb{D}}).$$

Observación:

- Si $\mathfrak{A} = A(\overline{\Omega})$, entonces $\mathcal{A}_\Phi \subset \overline{\mathfrak{A}_\Phi}$
- Si $\mathfrak{A} = H^\infty(\overline{\Omega})$, entonces $\mathcal{H}_\Phi \subset \overline{\mathfrak{A}_\Phi}$

Estas álgebras tienen aplicaciones en Teoría de Operadores y en el estudio de álgebras uniformes en curvas analíticas.

Un tipo distinto de subálgebra

Obsérvese que toda $f \in \overline{\mathfrak{A}_\Phi}$ es límite de polinomios en $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Supongamos que $\varphi_k : \Omega \to \overline{\mathbb{D}}$. Podemos definir:

- $\mathcal{A}_\Phi$ la subálgebra más pequeña de $A(\overline{\Omega})$ que contiene a todas las funciones $g \circ \varphi_k$, $g \in A(\overline{\mathbb{D}})$
- $\mathcal{H}_\Phi$ la subálgebra más pequeña de $H^\infty(\Omega)$ que contiene a todas las funciones $g \circ \varphi_k$, $g \in H^\infty(\mathbb{D})$

Estas subálgebras no son cerradas necesariamente.

$f \in \mathcal{A}_\Phi$ es de la forma

$$f(z) = \sum_{k=1}^{N} g_{1,k}(\varphi_1(z)) g_{2,k}(\varphi_2(z)) \cdots g_{n,k}(\varphi_n(z)), \qquad g_{j,k} \in A(\overline{\mathbb{D}}).$$

Observación:

- Si $\mathfrak{A} = A(\overline{\Omega})$, entonces $\mathcal{A}_\Phi \subset \overline{\mathfrak{A}_\Phi}$
- Si $\mathfrak{A} = H^\infty(\overline{\Omega})$, entonces $\mathcal{H}_\Phi \subset \overline{\mathfrak{A}_\Phi}$

Estas álgebras tienen aplicaciones en Teoría de Operadores y en el estudio de álgebras uniformes en curvas analíticas.

Álgebras en curvas analíticas

- $\mathcal{V} \subset \mathbb{D}^n$ una curva analítica contenida en el polidisco
- Álgebras $H^\infty(\mathcal{V})$ y $A(\overline{\mathcal{V}})$

Pregunta natural: describir estas álgebras.

Un ejemplo:

- $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio
- $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}^n$
- Ponemos $\mathcal{V} = \Phi(\Omega)$

El pullback $\Phi^* f = f \circ \Phi$.

- $\Phi^* A(\overline{\mathcal{V}})$ es una subálgebra de $A(\overline{\Omega})$
- $\Phi^* H^\infty(\overline{\mathcal{V}})$ es una subálgebra de $H^\infty(\Omega)$

Pregunta: describir estas subálgebras.

Una aplicación: resultados de extensión. Probar que toda $f \in H^\infty(\mathcal{V})$ se puede extender a una F que pertenece a cierto álgebra de funciones en $\mathbb{D}^n$.

Álgebras en curvas analíticas

- $\mathcal{V} \subset \mathbb{D}^n$ una curva analítica contenida en el polidisco
- Álgebras $H^\infty(\mathcal{V})$ y $A(\overline{\mathcal{V}})$

Pregunta natural: describir estas álgebras.

Un ejemplo:

- $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio
- $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}^n$
- Ponemos $\mathcal{V} = \Phi(\Omega)$

El pullback $\Phi^* f = f \circ \Phi$.

- $\Phi^* A(\overline{\mathcal{V}})$ es una subálgebra de $A(\overline{\Omega})$
- $\Phi^* H^\infty(\overline{\mathcal{V}})$ es una subálgebra de $H^\infty(\Omega)$

Pregunta: describir estas subálgebras.

Una aplicación: resultados de extensión. Probar que toda $f \in H^\infty(\mathcal{V})$ se puede extender a una F que pertenece a cierto álgebra de funciones en $\mathbb{D}^n$.

Álgebras en curvas analíticas

- $\mathcal{V} \subset \mathbb{D}^n$ una curva analítica contenida en el polidisco
- Álgebras $H^\infty(\mathcal{V})$ y $A(\overline{\mathcal{V}})$

Pregunta natural: describir estas álgebras.

Un ejemplo:

- $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio
- $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}^n$
- Ponemos $\mathcal{V} = \Phi(\Omega)$

El pullback $\Phi^* f = f \circ \Phi$.

- $\Phi^* A(\overline{\mathcal{V}})$ es una subálgebra de $A(\overline{\Omega})$
- $\Phi^* H^\infty(\overline{\mathcal{V}})$ es una subálgebra de $H^\infty(\Omega)$

Pregunta: describir estas subálgebras.

Una aplicación: resultados de extensión. Probar que toda $f \in H^\infty(\mathcal{V})$ se puede extender a una F que pertenece a cierto álgebra de funciones en $\mathbb{D}^n$.

Álgebras en curvas analíticas

- $\mathcal{V} \subset \mathbb{D}^n$ una curva analítica contenida en el polidisco
- Álgebras $H^\infty(\mathcal{V})$ y $A(\overline{\mathcal{V}})$

Pregunta natural: describir estas álgebras.

Un ejemplo:

- $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio
- $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}^n$
- Ponemos $\mathcal{V} = \Phi(\Omega)$

El pullback $\Phi^* f = f \circ \Phi$.

- $\Phi^* A(\overline{\mathcal{V}})$ es una subálgebra de $A(\overline{\Omega})$
- $\Phi^* H^\infty(\overline{\mathcal{V}})$ es una subálgebra de $H^\infty(\Omega)$

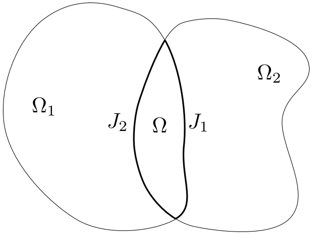
Pregunta: describir estas subálgebras.

Una aplicación: resultados de extensión. Probar que toda $f \in H^\infty(\mathcal{V})$ se puede extender a una F que pertenece a cierto álgebra de funciones en $\mathbb{D}^n$.

Summary

Un ejemplo sencillo

- Ω_1, Ω_2 dos dominios de Jordan
- $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$
- $\varphi_k : \Omega_k \to \mathbb{D}$, $k = 1, 2$, aplicaciones de Riemann



Queremos escribir $f \in H^\infty(\Omega)$ como

$$f(z) = g_1(\varphi_1(z)) + g_2(\varphi_2(z)), \qquad g_1, g_2 \in H^\infty(\mathbb{D}).$$

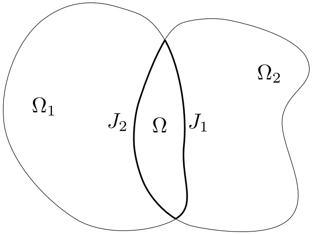
Como φ_k son univalentes, poniendo $g_k = h_k \circ \varphi_k^{-1}$, esto equivale a

$$f(z) = h_1(z) + h_2(z), \qquad h_k \in H^\infty(\Omega_k).$$

Esta descomposición es una separación de singularidades: En cierto sentido, f tiene singularidades en $J_1 \cup J_2$ y h_k sólo es singular en J_k.

Un ejemplo sencillo

- Ω_1, Ω_2 dos dominios de Jordan
- $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$
- $\varphi_k : \Omega_k \to \mathbb{D}$, $k = 1, 2$, aplicaciones de Riemann



Queremos escribir $f \in H^\infty(\Omega)$ como

$$f(z) = g_1(\varphi_1(z)) + g_2(\varphi_2(z)), \qquad g_1, g_2 \in H^\infty(\mathbb{D}).$$

Como φ_k son univalentes, poniendo $g_k = h_k \circ \varphi_k^{-1}$, esto equivale a

$$f(z) = h_1(z) + h_2(z), \qquad h_k \in H^\infty(\Omega_k).$$

Esta descomposición es una separación de singularidades: En cierto sentido, f tiene singularidades en $J_1 \cup J_2$ y h_k sólo es singular en J_k.

Separación de singularidades de Havin-Nersessian

Primer intento:

$$f(z) = \int_{J_1 \cup J_2} \frac{f(w)\,dw}{w - z} = \int_{J_1} \frac{f(w)\,dw}{w - z} + \int_{J_2} \frac{f(w)\,dw}{w - z}.$$

Ponemos

$$h_k(z) = \int_{J_k} \frac{f(w)\,dw}{w - z}.$$

Entonces $f = h_1 + h_2$ y $h_k \in \mathcal{H}(\Omega_k)$.

Sin embargo $h_k \notin H^\infty(\Omega_k)$. De hecho, h_k no es acotada cerca de los extremos de J_k, porque tiene singularidades de tipo logarítmico allí.

Este procedimiento simple hubiera funcionado para H^p, $p < \infty$, pero no funciona para H^∞. Hace falta hacer algo más en los extremos.

La idea de Havin-Nersessian: Ponemos $\{z_1, z_2\} = J_1 \cap J_2$ y $\Gamma_k = J_k \cap \mathbb{D}_\varepsilon(z_k)$. Sea R_k una rotación rígida en torno a z_k de modo que $R_k(\Gamma_k)$ esté fuera de Ω. Ponemos

$$h_1(z) = \int_{J_1} \frac{f(w)\,dw}{w - z} + \int_{R_2(\Gamma_2)} \frac{f(R_2^{-1}(w))\,dw}{w - z} - \int_{R_1(\Gamma_1)} \frac{f(R_1^{-1}(w))\,dw}{w - z}.$$

$$h_2(z) = \int_{J_2} \frac{f(w)\,dw}{w - z} - \int_{R_2(\Gamma_2)} \frac{f(R_2^{-1}(w))\,dw}{w - z} + \int_{R_1(\Gamma_1)} \frac{f(R_1^{-1}(w))\,dw}{w - z}.$$

Entonces $h_k \in H^\infty(\Omega_k)$.

Primer intento:

$$f(z) = \int_{J_1 \cup J_2} \frac{f(w)\,dw}{w-z} = \int_{J_1} \frac{f(w)\,dw}{w-z} + \int_{J_2} \frac{f(w)\,dw}{w-z}.$$

Ponemos

$$h_k(z) = \int_{J_k} \frac{f(w)\,dw}{w-z}.$$

Entonces $f = h_1 + h_2$ y $h_k \in \mathcal{H}(\Omega_k)$.
Sin embargo $h_k \notin H^\infty(\Omega_k)$. De hecho, h_k no es acotada cerca de los extremos de J_k, porque tiene singularidades de tipo logarítmico allí.
Este procedimiento simple hubiera funcionado para H^p, $p < \infty$, pero no funciona para H^∞. Hace falta hacer algo más en los extremos.
La idea de Havin-Nersessian: Ponemos $\{z_1, z_2\} = J_1 \cap J_2$ y $\Gamma_k = J_k \cap \mathbb{D}_\varepsilon(z_k)$. Sea R_k una rotación rígida en torno a z_k de modo que $R_k(\Gamma_k)$ esté fuera de Ω. Ponemos

$$h_1(z) = \int_{J_1} \frac{f(w)\,dw}{w-z} + \int_{R_2(\Gamma_2)} \frac{f(R_2^{-1}(w))\,dw}{w-z} - \int_{R_1(\Gamma_1)} \frac{f(R_1^{-1}(w))\,dw}{w-z},$$

$$h_2(z) = \int_{J_2} \frac{f(w)\,dw}{w-z} - \int_{R_2(\Gamma_2)} \frac{f(R_2^{-1}(w))\,dw}{w-z} + \int_{R_1(\Gamma_1)} \frac{f(R_1^{-1}(w))\,dw}{w-z}.$$

Entonces $h_k \in H^\infty(\Omega_k)$.

Primer intento:

$$f(z) = \int_{J_1 \cup J_2} \frac{f(w)\,dw}{w - z} = \int_{J_1} \frac{f(w)\,dw}{w - z} + \int_{J_2} \frac{f(w)\,dw}{w - z}.$$

Ponemos

$$h_k(z) = \int_{J_k} \frac{f(w)\,dw}{w - z}.$$

Entonces $f = h_1 + h_2$ y $h_k \in \mathcal{H}(\Omega_k)$.
Sin embargo $h_k \notin H^\infty(\Omega_k)$. De hecho, h_k no es acotada cerca de los extremos de J_k, porque tiene singularidades de tipo logarítmico allí.
Este procedimiento simple hubiera funcionado para H^p, $p < \infty$, pero no funciona para H^∞. Hace falta hacer algo más en los extremos.
La idea de Havin-Nersessian: Ponemos $\{z_1, z_2\} = J_1 \cap J_2$ y $\Gamma_k = J_k \cap \mathbb{D}_\varepsilon(z_k)$. Sea R_k una rotación rígida en torno a z_k de modo que $R_k(\Gamma_k)$ esté fuera de Ω. Ponemos

$$h_1(z) = \int_{J_1} \frac{f(w)\,dw}{w - z} + \int_{R_2(\Gamma_2)} \frac{f(R_2^{-1}(w))\,dw}{w - z} - \int_{R_1(\Gamma_1)} \frac{f(R_1^{-1}(w))\,dw}{w - z}.$$

$$h_2(z) = \int_{J_2} \frac{f(w)\,dw}{w - z} - \int_{R_2(\Gamma_2)} \frac{f(R_2^{-1}(w))\,dw}{w - z} + \int_{R_1(\Gamma_1)} \frac{f(R_1^{-1}(w))\,dw}{w - z}.$$

Entonces $h_k \in H^\infty(\Omega_k)$.

Separación de singularidades de Havin-Nersessian

Primer intento:

$$f(z) = \int_{J_1 \cup J_2} \frac{f(w)\,dw}{w - z} = \int_{J_1} \frac{f(w)\,dw}{w - z} + \int_{J_2} \frac{f(w)\,dw}{w - z}.$$

Ponemos

$$h_k(z) = \int_{J_k} \frac{f(w)\,dw}{w - z}.$$

Entonces $f = h_1 + h_2$ y $h_k \in \mathcal{H}(\Omega_k)$.
Sin embargo $h_k \notin H^\infty(\Omega_k)$. De hecho, h_k no es acotada cerca de los extremos de J_k, porque tiene singularidades de tipo logarítmico allí.
Este procedimiento simple hubiera funcionado para H^p, $p < \infty$, pero no funciona para H^∞. Hace falta hacer algo más en los extremos.
La idea de Havin-Nersessian: Ponemos $\{z_1, z_2\} = J_1 \cap J_2$ y $\Gamma_k = J_k \cap \mathbb{D}_\varepsilon(z_k)$. Sea R_k una rotación rígida en torno a z_k de modo que $R_k(\Gamma_k)$ esté fuera de Ω. Ponemos

$$h_1(z) = \int_{J_1} \frac{f(w)\,dw}{w - z} + \int_{R_2(\Gamma_2)} \frac{f(R_2^{-1}(w))\,dw}{w - z} - \int_{R_1(\Gamma_1)} \frac{f(R_1^{-1}(w))\,dw}{w - z}.$$

$$h_2(z) = \int_{J_2} \frac{f(w)\,dw}{w - z} - \int_{R_2(\Gamma_2)} \frac{f(R_2^{-1}(w))\,dw}{w - z} + \int_{R_1(\Gamma_1)} \frac{f(R_1^{-1}(w))\,dw}{w - z}.$$

Entonces $h_k \in H^\infty(\Omega_k)$.

Funciones no univalentes

Hemos probado: En el ejemplo simple donde $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ y $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ son aplicaciones de Riemann, tenemos $\mathcal{H}_\Phi = H^\infty(\Omega)$. De hecho, toda $f \in H^\infty(\Omega)$ se puede escribir como

$$f(z) = g_1(\varphi(z)) + g_2(\varphi(z)).$$

Los mismos argumentos funcionan cuando φ_k son univalentes. ¿Qué pasa en el caso en que φ_k no son univalentes?

Dos comentarios triviales:

- Si $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ "pega" dos puntos $z_1, z_2 \in \Omega$, (es decir $\Phi(z_1) = \Phi(z_2)$), entonces cualquier $f \in \mathcal{H}_\Phi$ pega estos dos puntos
- Si Φ' se anula en algún punto $z_0 \in \Omega$, entonces $f'(z_0) = 0$ para toda $f \in \mathcal{H}_\Phi$.

Incluso si Φ es inyectiva y Φ' no se anula, se puede probar que en general no se puede esperar que sea posible escribir cualquier f como

$$f(z) = g_1(\varphi_1(z)) + \ldots + g_n(\varphi_n(z)).$$

Funciones no univalentes

Hemos probado: En el ejemplo simple donde $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ y $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ son aplicaciones de Riemann, tenemos $\mathcal{H}_\Phi = H^\infty(\Omega)$. De hecho, toda $f \in H^\infty(\Omega)$ se puede escribir como

$$f(z) = g_1(\varphi(z)) + g_2(\varphi(z)).$$

Los mismos argumentos funcionan cuando φ_k son univalentes. ¿Qué pasa en el caso en que φ_k no son univalentes?

Dos comentarios triviales:

- Si $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ "pega" dos puntos $z_1, z_2 \in \Omega$, (es decir $\Phi(z_1) = \Phi(z_2)$), entonces cualquier $f \in \mathcal{H}_\Phi$ pega estos dos puntos
- Si Φ' se anula en algún punto $z_0 \in \Omega$, entonces $f'(z_0) = 0$ para toda $f \in \mathcal{H}_\Phi$.

Incluso si Φ es inyectiva y Φ' no se anula, se puede probar que en general no se puede esperar que sea posible escribir cualquier f como

$$f(z) = g_1(\varphi_1(z)) + \ldots + g_n(\varphi_n(z)).$$

Funciones no univalentes

Hemos probado: En el ejemplo simple donde $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ y $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ son aplicaciones de Riemann, tenemos $\mathcal{H}_\Phi = H^\infty(\Omega)$. De hecho, toda $f \in H^\infty(\Omega)$ se puede escribir como

$$f(z) = g_1(\varphi(z)) + g_2(\varphi(z)).$$

Los mismos argumentos funcionan cuando φ_k son univalentes. ¿Qué pasa en el caso en que φ_k no son univalentes?

Dos comentarios triviales:

- Si $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ "pega" dos puntos $z_1, z_2 \in \Omega$, (es decir $\Phi(z_1) = \Phi(z_2)$), entonces cualquier $f \in \mathcal{H}_\Phi$ pega estos dos puntos
- Si Φ' se anula en algún punto $z_0 \in \Omega$, entonces $f'(z_0) = 0$ para toda $f \in \mathcal{H}_\Phi$.

Incluso si Φ es inyectiva y Φ' no se anula, se puede probar que en general no se puede esperar que sea posible escribir cualquier f como

$$f(z) = g_1(\varphi_1(z)) + \ldots + g_n(\varphi_n(z)).$$

Funciones no univalentes

Hemos probado: En el ejemplo simple donde $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ y $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ son aplicaciones de Riemann, tenemos $\mathcal{H}_\Phi = H^\infty(\Omega)$. De hecho, toda $f \in H^\infty(\Omega)$ se puede escribir como

$$f(z) = g_1(\varphi(z)) + g_2(\varphi(z)).$$

Los mismos argumentos funcionan cuando φ_k son univalentes. ¿Qué pasa en el caso en que φ_k no son univalentes?

Dos comentarios triviales:

- Si $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ "pega" dos puntos $z_1, z_2 \in \Omega$, (es decir $\Phi(z_1) = \Phi(z_2)$), entonces cualquier $f \in \mathcal{H}_\Phi$ pega estos dos puntos
- Si Φ' se anula en algún punto $z_0 \in \Omega$, entonces $f'(z_0) = 0$ para toda $f \in \mathcal{H}_\Phi$.

Incluso si Φ es inyectiva y Φ' no se anula, se puede probar que en general no se puede esperar que sea posible escribir cualquier f como

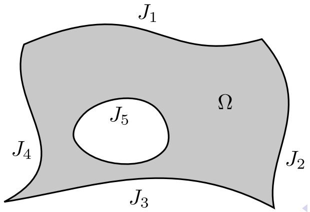
$$f(z) = g_1(\varphi_1(z)) + \ldots + g_n(\varphi_n(z)).$$

Summary

Dominios y aplicaciones admisibles

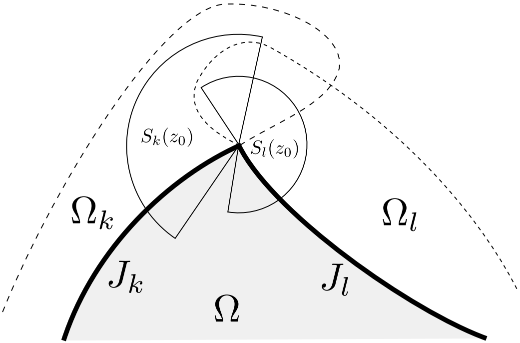
Definición

- $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio tal que $\partial\Omega$ es una unión finita y disjunta de curvas de Jordan analíticas a trozos. Suponemos que los ángulos interior de las "esquinas" de $\partial\Omega$ están entre 0 y π.
- $\{J_k\}_{k=1}^n$, donde J_k es unión finita disjunta de arcos analíticos cerrados de $\partial\Omega$. Pedimos $\partial\Omega = \bigcup J_k$.
- $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}^n$ analítica en Ω, continua hasta la frontera, más condiciones adicionales de regularidad (ver siguiente diapositiva).
- $|\varphi_k| = 1$ en J_k.
- φ_k' no se anula en J_k.
- $\varphi_k(\zeta) \neq \varphi_k(z)$ si $\zeta \in J_k$, $z \in \overline{\Omega}$ y $z \neq \zeta$.



Condiciones de regularidad

- Para cada $k = 1, \dots, n$, existe un abierto $\Omega_k \supset \Omega$ tal que el interior de J_k relativo a $\partial\Omega$ está contenido en Ω_k, $\varphi_k \in A(\overline{\Omega}_k)$ y φ'_k es de clase Hölder α en Ω_k.
- Si z_0 es un extremo de J_k, entonces existe un sector circular abierto $S_k(z_0)$ con vértice en z_0 y tal que $S_k(z_0) \subset \Omega_k$ y $J_k \cap \mathbb{D}_\varepsilon(z_0) \subset S_k(z_0) \cup \{z_0\}$, para algún $\varepsilon > 0$. Si z_0 es un extremo común de J_k y J_l, pedimos que $(S_k(z_0) \cap S_l(z_0)) \setminus \overline{\Omega} \neq \emptyset$.



Separación de singularidades con la composición

Teorema

Sean Ω y $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}^n$ admissibles. Entonces existen operadores lineales acotados $F_k : H^\infty(\Omega) \to H^\infty(\mathbb{D})$ tales que el operador

$$f \mapsto f - \sum_{k=1}^{n} F_k(f) \circ \varphi_k$$

es compacto en $H^\infty(\Omega)$ y su imagen está contenida en $A(\overline{\Omega})$. Además, F_k mandan $A(\overline{\Omega})$ en $A(\overline{\mathbb{D}})$.

Técnicas de la prueba

- El operador integral

$$f \mapsto \int_{J_k} \left[\frac{1}{w - z} - \frac{\varphi_k'(w)}{\varphi_k(w) - \varphi_k(z)} \right] f(w)\, dw$$

  es débilmente singular, y por tanto, compacto.
- Reemplazar las integrales de Cauchy

$$\int_{J_k} \frac{1}{w - z} f(w)\, dw$$

  por integrales de Cauchy *modificadas*

$$\int_{J_k} \frac{\varphi_k'(w)}{\varphi_k(w) - z} f(w)\, dw,$$

  que son analíticas en $\mathbb{C} \setminus \varphi_k(J_k)$.
- Usar el truco de Havin–Nersessian para obtener funciones H^∞ cuando descomponemos f en una suma de integrales de Cauchy en los arcos J_k.

Teorema

Si Ω y Φ son admisibles, entonces $\mathcal{H}_\Phi$ y $\mathcal{A}_\Phi$ son subálgebras cerradas de codimensión finita en $H^\infty(\Omega)$ y $A(\overline{\Omega})$ respectivamente.

Demostración.

Ponemos $Gf = \sum_{k=1}^n F_k(f) \circ \varphi_k$. Entonces $G : H^\infty(\Omega) \to H^\infty(\Omega)$ y $G - I$ es compacto. Entonces, $GH^\infty(\Omega)$ es un subespacio cerrado de codimensión finita en $H^\infty(\Omega)$. Observamos que $GH^\infty(\Omega) \subset \mathcal{H}_\Phi$.

Para $\mathcal{A}_\Phi$, usamos la restricción $G|A(\overline{\Omega})$. □

De hecho, también probamos $\mathcal{H}_\Phi$ que débi*-cerrado en $H^\infty(\Omega)$. La idea principal en la prueba de este resultado es que muchos de nuestros operadores tienen un operador pre-adjunto.

Teorema

Si Ω y Φ son admisibles, entonces $\mathcal{H}_\Phi$ y $\mathcal{A}_\Phi$ son subálgebras cerradas de codimensión finita en $H^\infty(\Omega)$ y $A(\overline{\Omega})$ respectivamente.

Demostración.

Ponemos $Gf = \sum_{k=1}^{n} F_k(f) \circ \varphi_k$. Entonces $G : H^\infty(\Omega) \to H^\infty(\Omega)$ y $G - I$ es compacto. Entonces, $GH^\infty(\Omega)$ es un subespacio cerrado de codimensión finita en $H^\infty(\Omega)$. Observamos que $GH^\infty(\Omega) \subset \mathcal{H}_\Phi$.

Para $\mathcal{A}_\Phi$, usamos la restricción $G|A(\overline{\Omega})$. $\square$

De hecho, también probamos $\mathcal{H}_\Phi$ que débi*-cerrado en $H^\infty(\Omega)$. La idea principal en la prueba de este resultado es que muchos de nuestros operadores tienen un operador pre-adjunto.

Codimensión finita

Teorema

Si Ω y Φ son admisibles, entonces $\mathcal{H}_\Phi$ y $\mathcal{A}_\Phi$ son subálgebras cerradas de codimensión finita en $H^\infty(\Omega)$ y $A(\overline{\Omega})$ respectivamente.

Demostración.

Ponemos $Gf = \sum_{k=1}^{n} F_k(f) \circ \varphi_k$. Entonces $G : H^\infty(\Omega) \to H^\infty(\Omega)$ y $G - I$ es compacto. Entonces, $GH^\infty(\Omega)$ es un subespacio cerrado de codimensión finita en $H^\infty(\Omega)$. Observamos que $GH^\infty(\Omega) \subset \mathcal{H}_\Phi$.

Para $\mathcal{A}_\Phi$, usamos la restricción $G|A(\overline{\Omega})$. □

De hecho, también probamos $\mathcal{H}_\Phi$ que débi*-cerrado en $H^\infty(\Omega)$. La idea principal en la prueba de este resultado es que muchos de nuestros operadores tienen un operador pre-adjunto.

Teorema

Si Ω y Φ son admisibles, Φ es inyectiva en $\overline{\Omega}$ y Φ' no se anula en Ω, entonces $\mathcal{H}_\Phi = H^\infty(\Omega)$ y $\mathcal{A}_\Phi = A(\overline{\Omega})$.

Recordatorio: que Φ sea inyectiva y Φ' no se anule son condiciones necesarias para que la igualdad se cumpla.

La prueba usa herramientas de álgebras de Banach y la siguiente clasificación de subbálgebras unitales cerradas de codimensión 1 A_0 en un álgebra de Banach unital A (Gorin, 1969).

A_0 tiene una de las dos formas siguientes:

- $A_0 = \ker(\psi_1 - \psi_2)$, donde $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}(A)$, $\psi_1 \neq \psi_2$. (Informalmente, A_0 son las funciones que coinciden en los puntos ψ_1 y ψ_2).
- $A_0 = \ker \eta$, donde $\eta \neq 0$ es una derivación continua en algún $\psi \in \mathfrak{M}(A)$, es decir, $\eta \in A^*$ and

$$\eta(fg) = \eta(f)\psi(g) + \psi(f)\eta(g), \qquad \forall f, g \in A.$$

(Informalmente, A_0 son las funciones cuya derivada en el punto ψ se anula).

Teorema

Si Ω y Φ son admisibles, Φ es inyectiva en $\overline{\Omega}$ y Φ' no se anula en Ω, entonces $\mathcal{H}_\Phi = H^\infty(\Omega)$ y $\mathcal{A}_\Phi = A(\overline{\Omega})$.

Recordatorio: que Φ sea inyectiva y Φ' no se anule son condiciones necesarias para que la igualdad se cumpla.

La prueba usa herramientas de álgebras de Banach y la siguiente clasificación de subbálgebras unitales cerradas de codimensión 1 A_0 en un álgebra de Banach unital A (Gorin, 1969).

A_0 tiene una de las dos formas siguientes:

- $A_0 = \ker(\psi_1 - \psi_2)$, donde $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}(A)$, $\psi_1 \neq \psi_2$. (Informalmente, A_0 son las funciones que coinciden en los puntos ψ_1 y ψ_2).
- $A_0 = \ker \eta$, donde $\eta \neq 0$ es una derivación continua en algún $\psi \in \mathfrak{M}(A)$, es decir, $\eta \in A^*$ and
$$\eta(fg) = \eta(f)\psi(g) + \psi(f)\eta(g), \qquad \forall f, g \in A.$$
(Informalmente, A_0 son las funciones cuya derivada en el punto ψ se anula).

Summary

Álgebras de funciones en curvas analíticas

Recordatorio: $\mathcal{V} = \Phi(\Omega)$ es una curva analítica en el polidisco $\mathbb{D}^n$. El pullback $\Phi^* f = f \circ \Phi$ lleva funciones en $\mathcal{V}$ a funciones en Ω.

Teorema

Si Ω y Φ son admisibles, entonces $\Phi^* H^\infty(\mathcal{V}) = \mathcal{H}_\Phi$ y $\Phi^* A(\overline{\mathcal{V}}) = \mathcal{A}_\Phi$.

La herramienta principal en la prueba es una caracterización del espacio de ideales maximales y las derivaciones de una *subálgebra pegada*. Ésta es una subálgebra B de un álgebra A que es de la forma

$$B = \{f \in A : \alpha_j(f) = \beta_j(f),\ j = 1, \dots, r\}, \qquad \alpha_j, \beta_j \in \mathfrak{M}(A),\ \alpha_j \neq \beta_j.$$

(Informalmente, B es la subálgebra de todas las funciones de A que “pegan” algunos puntos determinados).
Resulta que $\mathfrak{M}(B)$ se obtiene a partir de $\mathfrak{M}(A)$ pegando los puntos α_j and β_j. Además, el espacio de derivaciones de B en un punto $\psi_B \in \mathfrak{M}(B)$ es

$$\operatorname{Der}_{\psi_B}(B) \cong \bigoplus_{\psi \in (i^*)^{-1}(\psi_B)} \operatorname{Der}_\psi(A),$$

donde $i^* : \mathfrak{M}(A) \to \mathfrak{M}(B)$ es la aplicación cociente.
También usamos una clasificación de subálgebras de codimensión finita debida a Gamelin.

Álgebras de funciones en curvas analíticas

Recordatorio: $\mathcal{V} = \Phi(\Omega)$ es una curva analítica en el polidisco $\mathbb{D}^n$. El pullback $\Phi^* f = f \circ \Phi$ lleva funciones en $\mathcal{V}$ a funciones en Ω.

Teorema

Si Ω y Φ son admisibles, entonces $\Phi^* H^\infty(\mathcal{V}) = \mathcal{H}_\Phi$ y $\Phi^* A(\overline{\mathcal{V}}) = \mathcal{A}_\Phi$.

La herramienta principal en la prueba es una caracterización del espacio de ideales maximales y las derivaciones de una *subálgebra pegada*. Ésta es una subálgebra B de un álgebra A que es de la forma

$$B = \{f \in A : \alpha_j(f) = \beta_j(f),\ j = 1, \dots, r\}, \qquad \alpha_j, \beta_j \in \mathfrak{M}(A),\ \alpha_j \neq \beta_j.$$

(Informalmente, B es la subálgebra de todas las funciones de A que "pegan" algunos puntos determinados).

Resulta que $\mathfrak{M}(B)$ se obtiene a partir de $\mathfrak{M}(A)$ pegando los puntos α_j and β_j. Además, el espacio de derivaciones de B en un punto $\psi_B \in \mathfrak{M}(B)$ es

$$\operatorname{Der}_{\psi_B}(B) \cong \bigoplus_{\psi \in (i^*)^{-1}(\psi_B)} \operatorname{Der}_\psi(A),$$

donde $i^* : \mathfrak{M}(A) \to \mathfrak{M}(B)$ es la aplicación cociente.

También usamos una clasificación de subálgebras de codimensión finita debida a Gamelin.

Álgebras de funciones en curvas analíticas

Recordatorio: $\mathcal{V} = \Phi(\Omega)$ es una curva analítica en el polidisco $\mathbb{D}^n$. El pullback $\Phi^* f = f \circ \Phi$ lleva funciones en $\mathcal{V}$ a funciones en Ω.

Teorema

Si Ω y Φ son admisibles, entonces $\Phi^* H^\infty(\mathcal{V}) = \mathcal{H}_\Phi$ y $\Phi^* A(\overline{\mathcal{V}}) = \mathcal{A}_\Phi$.

La herramienta principal en la prueba es una caracterización del espacio de ideales maximales y las derivaciones de una *subálgebra pegada*. Ésta es una subálgebra B de un álgebra A que es de la forma

$$B = \{f \in A : \alpha_j(f) = \beta_j(f),\ j = 1, \ldots, r\}, \qquad \alpha_j, \beta_j \in \mathfrak{M}(A),\ \alpha_j \neq \beta_j.$$

(Informalmente, B es la subálgebra de todas las funciones de A que "pegan" algunos puntos determinados).
Resulta que $\mathfrak{M}(B)$ se obtiene a partir de $\mathfrak{M}(A)$ pegando los puntos α_j and β_j. Además, el espacio de derivaciones de B en un punto $\psi_B \in \mathfrak{M}(B)$ es

$$\operatorname{Der}_{\psi_B}(B) \cong \bigoplus_{\psi \in (i^*)^{-1}(\psi_B)} \operatorname{Der}_\psi(A),$$

donde $i^* : \mathfrak{M}(A) \to \mathfrak{M}(B)$ es la aplicación cociente.
También usamos una clasificación de subálgebras de codimensión finita debida a Gamelin.

El álgebra de Agler de $\mathbb{D}^n$

Es el álgebra de funciones analíticas f en $\mathbb{D}^n$ tales que la norma

$$\|f\|_{\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)} = \sup \|f(T_1, \ldots, T_n)\|$$

es finita. El supremo se toma sobre todas las tuplas $(T_1, \ldots, T_n)$ de contracciones que conmutan y cumplen $\sigma(T_j) \subset \mathbb{D}$.

- Para todo n, $\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n) \subset H^\infty(\mathbb{D}^n)$
- Para $n = 1$, hay igualdad y las normas coinciden (desigualdad de von Neumann)
- Para $n = 2$, hay igualdad y las normas coinciden (teorema de Andô)
- Para $n \geq 3$, las normas son distintas y se cree que la inclusión es propia

Comentario: cualquier función que es combinación lineal de funciones que dependen solo de una o dos de las variables pertenece a $\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)$.

Extensión al álgebra de Agler

Teorema

Si Ω y Φ son admisibles, entonces toda $f \in H^\infty(\mathcal{V})$ se puede extender a una $F \in \mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)$ con $\|F\|_{\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)} \leq C\|f\|_{H^\infty(\mathcal{V})}$. Si f es continua en $\overline{\mathcal{V}}$, entonces se puede tomar F continua en $\overline{\mathbb{D}}^n$.

Idea de la prueba: Tomamos $f \in H^\infty(\mathcal{V})$. Entonces $\Phi^* f \in \mathcal{H}_\Phi$. Necesitamos construir $F \in \mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)$ tal que $\Phi^* F = \Phi^* f$. Si

$$(\Phi^* f)(z) = f_1(\varphi_1(z_1)) + \ldots + f_n(\varphi_n(z_n)), \tag{1}$$

basta poner $F(z_1, \ldots, z_n) = f_1(z_1) + \ldots + f_n(z_n)$.

El conjunto de funciones de $\mathcal{H}_\Phi$ que pueden escribirse como en (1) tiene codimensión finita. Usamos teoría de Fredholm para extender nuestros argumentos a todo $\mathcal{H}_\Phi$.

Extensión al álgebra de Agler

Teorema

Si Ω y Φ son admisibles, entonces toda $f \in H^\infty(\mathcal{V})$ se puede extender a una $F \in \mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)$ con $\|F\|_{\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)} \leq C\|f\|_{H^\infty(\mathcal{V})}$. Si f es continua en $\overline{\mathcal{V}}$, entonces se puede tomar F continua en $\overline{\mathbb{D}}^n$.

Idea de la prueba: Tomamos $f \in H^\infty(\mathcal{V})$. Entonces $\Phi^* f \in \mathcal{H}_\Phi$. Necesitamos construir $F \in \mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)$ tal que $\Phi^* F = \Phi^* f$. Si

$$(\Phi^* f)(z) = f_1(\varphi_1(z_1)) + \ldots + f_n(\varphi_n(z_n)), \tag{1}$$

basta poner $F(z_1, \ldots, z_n) = f_1(z_1) + \ldots + f_n(z_n)$.

El conjunto de funciones de $\mathcal{H}_\Phi$ que pueden escribirse como en (1) tiene codimensión finita. Usamos teoría de Fredholm para extender nuestros argumentos a todo $\mathcal{H}_\Phi$.

Resultados anteriores de extensión

Supongamos que hay una variedad analítica $\widetilde{\mathcal{V}}$ en un entorno de $\overline{\mathbb{D}}^n$ tal que $\widetilde{\mathcal{V}} \cap \mathbb{D}^n = \mathcal{V}$.
Polyakov and Khenkin probaron que toda $f \in H^\infty(\mathcal{V})$ se puede extender a una $F \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ con $\|F\|_{H^\infty(\mathbb{D}^n)} \leq C\|f\|_{H^\infty(\mathcal{V})}$.

- Nosotros no suponemos la existencia de $\widetilde{\mathcal{V}}$.
- Obtenemos una extensión $F \in \mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)$.

De hecho, probamos que existe un subespacio de codimensión finita en $H^\infty(\mathcal{V})$ tal que toda función en este subespacio se puede extender a una F que es de la forma

$$F(z_1, \dots, z_n) = F_1(z_1) + F_2(z_2) + \cdots + F_n(z_n), \qquad F_j \in H^\infty(\mathbb{D}),$$

con $\|F_j\|_{H^\infty(\mathbb{D})} \leq C\|f\|_{H^\infty(\mathcal{V})}$.

Resultados anteriores de extensión

Supongamos que hay una variedad analítica $\widetilde{\mathcal{V}}$ en un entorno de $\overline{\mathbb{D}}^n$ tal que $\widetilde{\mathcal{V}} \cap \mathbb{D}^n = \mathcal{V}$.
Polyakov and Khenkin probaron que toda $f \in H^\infty(\mathcal{V})$ se puede extender a una $F \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ con $\|F\|_{H^\infty(\mathbb{D}^n)} \leq C\|f\|_{H^\infty(\mathcal{V})}$.

- Nosotros no suponemos la existencia de $\widetilde{\mathcal{V}}$.
- Obtenemos una extensión $F \in \mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)$.

De hecho, probamos que existe un subespacio de codimensión finita en $H^\infty(\mathcal{V})$ tal que toda función en este subespacio se puede extender a una F que es de la forma

$$F(z_1, \dots, z_n) = F_1(z_1) + F_2(z_2) + \cdots + F_n(z_n), \qquad F_j \in H^\infty(\mathbb{D}),$$

con $\|F_j\|_{H^\infty(\mathbb{D})} \leq C\|f\|_{H^\infty(\mathcal{V})}$.

Resultados anteriores de extensión

Supongamos que hay una variedad analítica $\widetilde{\mathcal{V}}$ en un entorno de $\overline{\mathbb{D}}^n$ tal que $\widetilde{\mathcal{V}} \cap \mathbb{D}^n = \mathcal{V}$.
Polyakov and Khenkin probaron que toda $f \in H^\infty(\mathcal{V})$ se puede extender a una $F \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ con $\|F\|_{H^\infty(\mathbb{D}^n)} \leq C\|f\|_{H^\infty(\mathcal{V})}$.

- Nosotros no suponemos la existencia de $\widetilde{\mathcal{V}}$.
- Obtenemos una extensión $F \in \mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)$.

De hecho, probamos que existe un subespacio de codimensión finita en $H^\infty(\mathcal{V})$ tal que toda función en este subespacio se puede extender a una F que es de la forma

$$F(z_1, \ldots, z_n) = F_1(z_1) + F_2(z_2) + \cdots + F_n(z_n), \qquad F_j \in H^\infty(\mathbb{D}),$$

con $\|F_j\|_{H^\infty(\mathbb{D})} \leq C\|f\|_{H^\infty(\mathcal{V})}$.

Summary

El álgebra $H^\infty(\mathcal{K}_\Psi)$

- X un conjunto, Ψ una colección de funciones X con valores complejos
- $\sup\{|\psi(x)| : \psi \in \Psi\} < 1$, para todo $x \in X$
- Ψ separa los puntos de X

Entonces Ψ es una *colección de funciones test* en X.

Un núcleo positivo $k : X \times X \to \mathcal{B}^*$ ($\mathcal{B}^*$ el dual de un álgebra-C^* $\mathcal{B}$) es una función tal que para cada subconjunto $F \subset X$ finito y cada $f : F \to \mathcal{B}$, se tiene

$$\sum_{a,b\in F} k(a,b)(f(b)^* f(a)) \geq 0.$$

$\mathcal{K}_\Psi$ la colección de núcleos positivos k en X tales que

$$(1 - \psi(x)\psi(y)^*)k(x,y)$$

también es positivo para cada $\psi \in \Psi$.
$H^\infty(\mathcal{K}_\Psi)$ el álgebra de funciones $f : X \to \mathbb{C}$ tales que

$$(C^2 - f(x)f(y)^*)k(x,y)$$

es positivo para todo $k \in \mathcal{K}_\Psi$, para alguna constante $C > 0$. La constante C más pequeña posible es $\|f\|_{H^\infty(\mathcal{K}_\Psi)}$.

Aplicaciones importantes en Teoría de Operadores. Introducida por Dritschel y McCullough, 2007.

El álgebra $H^\infty(\mathcal{K}_\Psi)$

- X un conjunto, Ψ una colección de funciones X con valores complejos
- $\sup\{|\psi(x)| : \psi \in \Psi\} < 1$, para todo $x \in X$
- Ψ separa los puntos de X

Entonces Ψ es una *colección de funciones test* en X.

Un núcleo positivo $k : X \times X \to \mathcal{B}^*$ ($\mathcal{B}^*$ el dual de un álgebra-C^* $\mathcal{B}$) es una función tal que para cada subconjunto $F \subset X$ finito y cada $f : F \to \mathcal{B}$, se tiene

$$\sum_{a,b \in F} k(a,b)(f(b)^* f(a)) \geq 0.$$

$\mathcal{K}_\Psi$ la colección de núcleos positivos k en X tales que

$$(1 - \psi(x)\psi(y)^*)k(x,y)$$

también es positivo para cada $\psi \in \Psi$.
$H^\infty(\mathcal{K}_\Psi)$ el álgebra de funciones $f : X \to \mathbb{C}$ tales que

$$(C^2 - f(x)f(y)^*)k(x,y)$$

es positivo para todo $k \in \mathcal{K}_\Psi$, para alguna constante $C > 0$. La constante C más pequeña posible es $\|f\|_{H^\infty(\mathcal{K}_\Psi)}$.

Aplicaciones importantes en Teoría de Operadores. Introducida por Dritschel y McCullough, 2007.

- X un conjunto, Ψ una colección de funciones X con valores complejos
- $\sup\{|\psi(x)| : \psi \in \Psi\} < 1$, para todo $x \in X$
- Ψ separa los puntos de X

Entonces Ψ es una *colección de funciones test* en X.

Un núcleo positivo $k : X \times X \to \mathcal{B}^*$ ($\mathcal{B}^*$ el dual de un álgebra-C^* $\mathcal{B}$) es una función tal que para cada subconjunto $F \subset X$ finito y cada $f : F \to \mathcal{B}$, se tiene

$$\sum_{a,b\in F} k(a,b)(f(b)^* f(a)) \geq 0.$$

$\mathcal{K}_\Psi$ la colección de núcleos positivos k en X tales que

$$(1 - \psi(x)\psi(y)^*)k(x,y)$$

también es positivo para cada $\psi \in \Psi$.
$H^\infty(\mathcal{K}_\Psi)$ el álgebra de funciones $f : X \to \mathbb{C}$ tales que

$$(C^2 - f(x)f(y)^*)k(x,y)$$

es positivo para todo $k \in \mathcal{K}_\Psi$, para alguna constante $C > 0$. La constante C más pequeña posible es $\|f\|_{H^\infty(\mathcal{K}_\Psi)}$.

Aplicaciones importantes en Teoría de Operadores. Introducida por Dritschel y McCullough, 2007.

El álgebra $H^\infty(\mathcal{K}_\Psi)$

- X un conjunto, Ψ una colección de funciones X con valores complejos
- $\sup\{|\psi(x)| : \psi \in \Psi\} < 1$, para todo $x \in X$
- Ψ separa los puntos de X

Entonces Ψ es una *colección de funciones test* en X.

Un núcleo positivo $k : X \times X \to \mathcal{B}^*$ ($\mathcal{B}^*$ el dual de un álgebra-C^* $\mathcal{B}$) es una función tal que para cada subconjunto $F \subset X$ finito y cada $f : F \to \mathcal{B}$, se tiene

$$\sum_{a,b\in F} k(a,b)(f(b)^* f(a)) \geq 0.$$

$\mathcal{K}_\Psi$ la colección de núcleos positivos k en X tales que

$$(1 - \psi(x)\psi(y)^*)k(x,y)$$

también es positivo para cada $\psi \in \Psi$.
$H^\infty(\mathcal{K}_\Psi)$ el álgebra de funciones $f : X \to \mathbb{C}$ tales que

$$(C^2 - f(x)f(y)^*)k(x,y)$$

es positivo para todo $k \in \mathcal{K}_\Psi$, para alguna constante $C > 0$. La constante C más pequeña posible es $\|f\|_{H^\infty(\mathcal{K}_\Psi)}$.

Aplicaciones importantes en Teoría de Operadores. Introducida por Dritschel y McCullough, 2007.

- $\Phi : \Omega \to \mathbb{D}^n$
- $\mathcal{V} = \Phi(\Omega)$

Entonces $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, donde $\psi_k(z_1, \dots, z_n) = z_k$, es una colección de funciones test en $\mathcal{V}$ y

$$H^\infty(\mathcal{K}_\Psi) = \{F|\mathcal{V} : F \in \mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)\},$$

$$\|f\|_{H^\infty(\mathcal{K}_\Psi)} = \inf\{\|F\|_{\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)} : F \in \mathcal{SA}(\mathbb{D}^n),\ F|\mathcal{V} = f\}.$$

Como conjuntos, podemos identificar $H^\infty(\mathcal{K}_\Psi)$ con $\Phi^*\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n) \subset H^\infty(\Omega)$ (las normas no coinciden).

- $\Phi : \Omega \to \mathbb{D}^n$
- $\mathcal{V} = \Phi(\Omega)$

Entonces $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, donde $\psi_k(z_1, \dots, z_n) = z_k$, es una colección de funciones test en $\mathcal{V}$ y

$$H^\infty(\mathcal{K}_\Psi) = \{F|\mathcal{V} : F \in \mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)\},$$

$$\|f\|_{H^\infty(\mathcal{K}_\Psi)} = \inf\{\|F\|_{\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n)} : F \in \mathcal{SA}(\mathbb{D}^n),\ F|\mathcal{V} = f\}.$$

Como conjuntos, podemos identificar $H^\infty(\mathcal{K}_\Psi)$ con $\Phi^*\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n) \subset H^\infty(\Omega)$ (las normas no coinciden).

Siempre tenemos las inclusiones:

$$\mathcal{H}_\Phi \subset \Phi^* \mathcal{SA}(\mathbb{D}^n) \subset \Phi^* H^\infty(\mathbb{D}^n) \subset \Phi^* H^\infty(\mathcal{V}) \subset H^\infty(\Omega).$$

En nuestro caso, hemos probado que:

$$\mathcal{H}_\Phi = \Phi^* H^\infty(\mathcal{V})$$

y $\mathcal{H}_\Phi$ tiene codimensión finita en $H^\infty(\Omega)$.
Además, si Φ es inyectiva y Φ' no se anula (es decir, si $\mathcal{V}$ es no-singular)

$$\mathcal{H}_\Phi = H^\infty(\Omega).$$

Inclusiones de ciertas subálgebras de $H^\infty(\Omega)$

Siempre tenemos las inclusiones:

$$\mathcal{H}_\Phi \subset \Phi^* \mathcal{SA}(\mathbb{D}^n) \subset \Phi^* H^\infty(\mathbb{D}^n) \subset \Phi^* H^\infty(\mathcal{V}) \subset H^\infty(\Omega).$$

En nuestro caso, hemos probado que:

$$\mathcal{H}_\Phi = \Phi^* H^\infty(\mathcal{V})$$

y $\mathcal{H}_\Phi$ tiene codimensión finita en $H^\infty(\Omega)$.
Además, si Φ es inyectiva y Φ' no se anula (es decir, si $\mathcal{V}$ es no-singular)

$$\mathcal{H}_\Phi = H^\infty(\Omega).$$

Siempre tenemos las inclusiones:

$$\mathcal{H}_\Phi \subset \Phi^*\mathcal{SA}(\mathbb{D}^n) \subset \Phi^* H^\infty(\mathbb{D}^n) \subset \Phi^* H^\infty(\mathcal{V}) \subset H^\infty(\Omega).$$

En nuestro caso, hemos probado que:

$$\mathcal{H}_\Phi = \Phi^* H^\infty(\mathcal{V})$$

y $\mathcal{H}_\Phi$ tiene codimensión finita en $H^\infty(\Omega)$.
Además, si Φ es inyectiva y Φ' no se anula (es decir, si $\mathcal{V}$ es no-singular)

$$\mathcal{H}_\Phi = H^\infty(\Omega).$$